



PROBLEMAS ADICIONALES # 2

Profesor: Alejandro Maass

Auxiliares: Sebastián Donoso F. & César Vigouroux.

P1. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ anotaremos $\langle x, y \rangle = x^T y$

- (a) Sea $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que $A^n = 0$. Probar que $I - A$ es invertible con inversa $I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$
- (b) (i) Sea $B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\langle Bx, y \rangle = \langle x, B^T y \rangle$.
(ii) Sea $A = I + B^T B$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\langle Ax, x \rangle = \|x\|^2 + \|Bx\|^2$.
(iii) Concluya que si $Ax = 0$ entonces $x = 0$.

P2. Considere las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- (i) Probar que P es invertible y calcule P^{-1}
- (ii) Probar que $A = PDP^{-1}$ y calcule A^{10}

P3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & 1\alpha - \beta \\ 2 & -1 & 2\alpha - 1 & -\beta - 1 \\ 0 & 1 & -1 & \beta - 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 - \beta \\ 1 \\ 2\beta - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Determine los valores de los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que el sistema de ecuaciones $Ax = b$,

donde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$

- (i) no tenga solución.
- (ii) tenga soluciones infinitas, y calcule el conjunto solución.
- (iii) tenga solución única, y obtenga dicha solución.