

CLASE AUXILIAR # 2

Profesor: Alejandro Maass

Auxiliares: Sebastián Donoso F. & César Vigouroux.

P1. Considere el sistema

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = \beta$$

$$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 1$$

Escríbalo en forma matricial, resuélvalo y calcule la inversa de A en caso de existir.

P2. Sean $A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 + \alpha \\ 2\beta + \alpha - 2 \end{bmatrix}$

Determine los valores de los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que el sistema de ecuaciones $Ax = b$,

donde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$

- (i) no tenga solución.
- (ii) tenga soluciones infinitas, y calcule el conjunto solución.
- (iii) tenga solución única, y obtenga dicha solución.

P3. La matriz $U \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ se dice unitaria si $U^T U = I_n$, donde U^T es la traspuesta de U .

- (i) Sean U, U_1, U_2 matrices unitarias. Pruebe que U es invertible y que su inversa es U^T . Además, pruebe que $U_1 U_2$ es unitaria.
- (ii) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^T u = 1$. Pruebe que $H = I_n - 2uu^T$ es unitaria.
- (iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $G(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Pruebe que $G(\theta)$ es unitaria y que cualquiera sea $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ existe un θ tal que la componente (2,1) de $G(\theta)A$ es cero.
- (iv) Sea $U \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ triangular superior y unitaria. Pruebe que U es diagonal y determine los valores de \mathbb{R} que pueden tomar las componentes en la diagonal de U .