Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Algebra Lineal 09-2

Problemas adicionales # 1

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Sebastián Donoso F. & César Vigouroux.

P1. a) Sea P matriz cuadrada de tamaño n tal que $P^2 = P$

(i) Demuestre que $\forall k \in N, P^k = P$

(ii) Demuestre que si $A = I - P \Rightarrow A^k = A, \forall k \in \mathbb{N}$

b) Sea $M \in M_{mxn}$ tal que $M^T M$ es invertible. Sea $P = I_n - M(M^T M)^{-1}$ Pruebe que:

(i) $P^2 = P$ y $PM = 0$ (la matriz de ceros)

(ii) $M^T M$ es simétrica y P también lo es.

(iii) P no es invertible.

P2. a) Sean $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ Demuestre que:

(i) A es invertible si y sólo si AA^T es invertible.

(ii) Si $A^2 = A$ y $B = I - A$, entonces $B^3 = B$. Para el caso de A invertible, calcule explícitamente A y B.

b) Demuestre que si existe $k \geq 1$ tal que $A^k = I$, entonces A es invertible

P3. a) Hallar todas las matrices de la forma $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$ tales que $A^2 = I$

b) Determine si existe una matriz M cuadrada de tamaño 2 tal que para toda matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ se cumpla $MA = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & d \end{bmatrix}$

c) Pruebe que si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ es tal que $A^2 + A + I = 0$, entonces A es invertible.

P4. Sean $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ matrices que conmutan, es decir, AB=BA. Pruebe que:

(i) $A^n B = BA^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $A^T B^T = B^T A^T$

(iii) Si son invertibles, entonces $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$