Solución P2. Auxiliar # 8

a) (i) Sean $p, q \in \mathcal{P}_2, \lambda \in \mathbb{R}$. Sea $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} L(p + \lambda q)(x) &= (p + \lambda q)(x)(x^2 + 1) \\ &= (p(x) + \lambda q(x))(x^2 + 1) \\ &= p(x)(x^2 + 1) + \lambda q(x)(x^2 + 1) \\ &= L(p)(x) + \lambda L(q)(x) \\ &= (L(p) + \lambda L(q))(x) \end{aligned}$$

Como esta igualdad se tiene $\forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow L(p+\lambda q) = L(p)+\lambda L(q)$. Es decir, L es lineal.

(ii) Sea $p \in \mathcal{P}_2$ donde $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Si $p \in \ker(L) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, L(p)(x) = 0 \Leftrightarrow (a_0 + a_1x + a_2x^2)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \ a_0 + a_1x + (a_0 + a_2)x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 = 0$ (1), y como $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ es l.i. $\Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow p \equiv 0 \implies \ker(L) = \{0\}$. Luego, $dim(\ker(L)) = 0$.

Sea $q \in Im(L) \Rightarrow q(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2)(x^2 + 1) = a_0(x^2 + 1) + a_1(x^3 + x) + a_2(x^4 + x^2) \Longrightarrow Im(L) = \left\langle \{x^2+1, x^3+x, x^4+x^2\} \right\rangle$. Para ver que este conjunto es base de $Im(L)$, se puede sencillamente probar que son l.i haciendo uso de la ecuación (1), o utilizando el T.N.I de la siguiente forma. Como $dim(\mathcal{P}_2) = 3 = dim(\ker(L)) + dim(Im(L)) = 0 + dim(Im(L)) \Rightarrow dim(Im(L)) = 3$. Y al cumplirse $|\{x^2 + 1, x^3 + x, x^4 + x^2\}| = dim(Im(L)) \Rightarrow \{x^2 + 1, x^3 + x, x^4 + x^2\}$ es l.i, i.e., $\{x^2 + 1, x^3 + x, x^4 + x^2\}$ es base de $Im(L)$, y esta tiene dimensión 3.

(iii) Sea $p \in \mathcal{P}_1 \cap V$. Esto es, $p(x) = a + bx$ y $p(x) = a_0 + a_1x + (a_0 + a_2)x^2 + a_1x^3 + a_2x^4$. Luego, por igualdad de polinomios, $a_1 = a_2 = a_0 + a_2 = 0 \Rightarrow a = a_0 = b = a_1 = 0 \Rightarrow p(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$, lo cual significa $\mathcal{P}_1 \cap V = \{0\}$.

(iv) $dim(V \oplus \mathcal{P}_1) = dim(V) + dim(\mathcal{P}_1) = 3 + 2 = 5$, y al ser $V \oplus \mathcal{P}_1$ s.e.v de $\mathcal{P}_4$, cuya dimensión es 5, se tiene que $V \oplus \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_4$

b) Probemos las dos inclusiones ($\subseteq$ y $\supseteq$);
$\subseteq$: Sea $x \in (U + V)^\perp$, i.e., $\forall u \in U, \forall v \in V,\ < x, u + v >= 0$ (2). Como U y V son s.e.v., poseen al 0, y podemos evaluar (2) en $u = 0, v = 0$ y lleguamos a $\forall u \in U,\ < x, u >= 0$ y $\forall v \in V,\ < x, v >= 0 \Rightarrow \forall w \in U \cap V, < x, w >= 0 \Rightarrow x \in U^\perp$ y $x \in U^\perp \Rightarrow x \in U^\perp \cap V^\perp$.

$\supseteq$: Sea $x \in U^\perp \cap V^\perp$, i.e., $\forall u \in U, \forall v \in V, < x, u >=< x, v >= 0$ Ahora, para $w = u + v \in U + V,\ < x, w >=< x, u > + < x, v >= 0 \Rightarrow x \in (U + V)^\perp$