

Auxiliar 5: Álgebra Lineal

Profesor Auxiliar: Orlando Rivera Letelier
Lunes 31 de Agosto de 2009

P1. Sea $p \in \mathbb{K}^n$, y $d_1, d_2, \overline{d_1}, \overline{d_2} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, con $d_1 \nparallel d_2$ y $\overline{d_1} \nparallel \overline{d_2}$. Probar que

$$\Pi_{p, d_1, d_2} = \Pi_{p, \overline{d_1}, \overline{d_2}} \iff (\exists A \in M_{2,2}(\mathbb{K}) \text{ invertible}) \quad \begin{bmatrix} \overline{d_1} & | & \overline{d_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & | & d_2 \end{bmatrix} A$$

- P2.** a) Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ se define el trazo entre x e y como $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y / 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Demuestre que si para algún $z \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\|x - y\| = \|x - z\| + \|z - y\|$, entonces $z \in [x, y]$.
- b) Pruebe la identidad del paralelogramo. Esto es:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^n) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

P3. Sean L_1 y L_2 rectas no paralelas en $\mathbb{R}^3$. Las ecuaciones vectoriales de L_1 y L_2 son:

$$\begin{aligned} L_1 : \quad & v = P + \lambda d_1, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ L_2 : \quad & v = Q + \mu d_2, \quad \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- a) Demuestre que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \iff \langle P - Q, d_1 \times d_2 \rangle = 0$.
- b) Si $L_1 \cap L_2 = \{R\}$, demuestre que

$$R = P + \frac{\langle (Q - P) \times d_2, d_1 \times d_2 \rangle}{\|d_1 \times d_2\|^2} d_1 = Q + \frac{\langle (Q - P) \times d_1, d_1 \times d_2 \rangle}{\|d_1 \times d_2\|^2} d_2$$

- c) La distancia entre dos conjuntos se define como $\text{dist}(A, B) = \inf\{\|v_1 - v_2\| / v_1 \in A, v_2 \in B\}$. Demuestre que la distancia entre las dos rectas es:

$$\text{dist}(L_1, L_2) = \frac{|\langle (P - Q), d_1 \times d_2 \rangle|}{\|d_1 \times d_2\|}$$

(INDICACIÓN: Trabaje de forma separada los casos donde las rectas se intersecan en un punto y cuando tienen intersección vacía.)

- d) Encuentre la ecuación de la perpendicular común a L_1 y L_2 (es decir, la recta que interseca a L_1 y L_2 y es perpendicular a ambas).
- e) Calcule la distancia entre L_1 y L_2 y encuentre la perpendicular común cuando:

$$L_1 : \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$