Auxiliar 3: Álgebra Lineal

Profesor Auxiliar: Orlando Rivera Letelier
Lunes 17 de Agosto de 2009

P1. **(a)** Determine si existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de modo que para toda matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ se cumpla

$$M \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & d \end{bmatrix}$$

(b) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ verifica que $A^2 + A + I = 0$ entonces es invertible.

(c) Suponga que A y $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ conmutan, es decir

$$AB = BA$$

Pruebe que

i) $A^n B = BA^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
ii) $A^t B^t = B^t A^t$, y
iii) si además A y B son invertibles, entonces $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

P2. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & (3-\alpha)x_4 & = & \alpha \\ x_1 & + & x_2 & & & + & (\beta+\alpha+3)x_4 & = & \beta \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2\alpha+2\beta \end{array}$$

en las variables x_1, x_2, x_3 y x_4, donde α, $\beta \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) Aplique el método de escalonamiento y determine los valores de α y β de modo que

i) el sistema tenga una única solución,
ii) el sistema no tenga solución, y
iii) el sistema tenga infinitas soluciones.

(b) Para $\alpha = -2$ y $\beta = 2$ encuentre el conjunto solución.

P3. La matriz $U \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ se dice unitaria si $U^t U = I_n$.

(a) Sean U, U_1, $U_2 \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ matrices unitarias. Pruebe que U es invertible y que su inversa $U^{-1} = U^t$ es unitaria. Pruebe además que $U_1 U_2$ es unitaria.

(b) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^t u = 1$. Pruebe que $H = I_n - 2uu^t$ es unitaria.

(c) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Pruebe que $G(\theta)$ es unitaria y que cualquiera sea $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ existe $\theta \in \mathbb{R}$ de modo que $\left[G(\theta) \cdot A\right]_{2,1} = 0$.

(d) Sea $U \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ triangular superior y unitaria. Pruebe que U es diagonal y determine los valores de $\mathbb{R}$ que pueden tomar los coeficientes en la diagonal de U.

P4. Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$. Considere el siguiente sistema lineal en las variables reales x_1, x_2, x_3 y x_4

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -\beta x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ -\beta x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ \beta x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ -\beta x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & + & (\alpha+1)x_4 & = & \alpha+\beta+3 \end{array}$$

(a) Determinar los valores α, $\beta \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema lineal tiene solución única.

(b) Determinar los valores α, $\beta \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema lineal tiene infinitas soluciones.

(c) Determinar los valores α, $\beta \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema lineal no tiene solución .

(d) Para $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ encuente la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal y determine la solución del sistema.