Se nos pide resolver el sistema Ax=b, donde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \;,\; b=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \;,\; x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$ *y luego encontrar la inversa de A.*

Para no hacer el mismo trabajo 2 veces (resolver el sistema y luego invertir la matriz) copiaremos matriz A aumentada con el lado derecho (b) y con la identidad.

$$(A|b|I)=\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nos situamos en a_{11} *y nos hacemos la pregunta ¿Es distinto de cero? . Si la respuesta es afirmativa, pivoteamos con ese elemento haciendo operaciones válidas (equivalentes a multiplicar por una matriz elemental) para generar ceros en los elementos por debajo del pivote. Vemos que* a_{11} es 1 *y luego pivoteamos con* a_{11} .

Pivoteando , queda:

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 8 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Habiendo generado los ceros bajo la diagonal en la primera columna, paso a la segunda, bajando por la diagonal(de A) . Veo la posición, $\tilde{a}_{22}=2\neq 0$ *luego puedo eseguir a pivoteando con* $\tilde{a}_{22}$ *(generar ceros bajo* $\tilde{a}_{22}$ *).*

Pivoteando queda,

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 9 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 17 & 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Igual que en el paso anterior, ahora pasamos a la tercera columna y corroboremos que el pivote sea no nulo. En efecto , $\tilde{\tilde{a}}_{33}=1\neq 0$ *. Seguimos pivoteamos hacia abajo.*

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & \boxed{-55} & -4 & 7 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Aquí ya terminamos de escalonar, así que podríamos reescribir el sistema lineal e ir despejando las variables x_1, x_2, x_3, x_4.
Pero de manera equivalente, seguiremos operando la columna donde se puso b en un principio y al final llegaremos a la solución deseada.

Con la matriz ya convertida en una triangular superior, para seguir el proceso de inversión debemos escalonar hacia arriba. (Y así al final del proceso quedará una matriz triangular superior y triangular superior a la vez, i.e una diagonal, con lo cual de manera sencilla obtendremos la identidad).
Dividamos por -7 la última fila para hacer más sencillo el proceso de pivoteo (esto es sólo por comodidad).

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{55}{7} & \frac{4}{7} & -1 & \frac{8}{7} & \frac{-2}{7} \end{pmatrix}$$

Pivoteando hacia arriba con $\boxed{1}$,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & \frac{-96}{7} & \frac{-1}{7} & 0 & 2 & \frac{4}{7} \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \frac{158}{7} & \frac{-2}{7} & -2 & \frac{24}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{-47}{7} & \frac{-1}{7} & 1 & \frac{-9}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{55}{7} & \frac{4}{7} & -1 & \frac{8}{7} & \frac{-2}{7} \end{pmatrix}$$

Repitiendo el procedimiento.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{-49}{7} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & \frac{64}{7} & \frac{-4}{7} & 0 & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-47}{7} & \frac{-1}{7} & 1 & \frac{-9}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{55}{7} & \frac{4}{7} & -1 & \frac{8}{7} & \frac{-2}{7} \end{pmatrix}$$

Diviendo la segunda fila por 2:

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{-49}{7} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{32}{7} & \frac{-2}{7} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-47}{7} & \frac{-1}{7} & 1 & \frac{-9}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{55}{7} & \frac{4}{7} & -1 & \frac{8}{7} & \frac{-2}{7} \end{pmatrix}$$

Y pivoteando por última vez

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-17}{7} & \frac{-2}{7} & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{32}{7} & \frac{-2}{7} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-47}{7} & \frac{-1}{7} & 1 & \frac{-9}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{55}{7} & \frac{4}{7} & -1 & \frac{8}{7} & \frac{-2}{7} \end{pmatrix}$$

De aquí , reescribimos el sistema lineal , concluyendo:

$$x=\begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ \frac{32}{7} \\ \frac{-47}{7} \\ \frac{55}{7} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-2}{7} & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-2}{7} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-1}{7} & 1 & \frac{-9}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & -1 & \frac{8}{7} & \frac{-2}{7} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Tarea: Verifique que $x = A^{-1}b$