

Auxiliar 1: Álgebra Lineal

Profesor Auxiliar: Orlando Rivera Letelier
Lunes 03 de Agosto de 2009

P1. Se dice que $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es una matriz de proyección si $P = P^2$.

- (a) Pruebe que si P es matriz de proyección, entonces $I_n - P$ es matriz de proyección, donde I_n es la matriz identidad en $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$.
- (b) Pruebe que P es matriz de proyección si y sólo si $P^2(I_n - P) = \mathbf{0}$ y $P(I_n - P)^2 = \mathbf{0}$.
- (c) Encuentre $P \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{K})$ tal que $P \neq P^2$ y $P^2(I_2 - P) = \mathbf{0}$.

P2. Sea $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonal, con d_1, \dots, d_n distintos y $A, B, M, S \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

- (a) Pruebe que si $MD = DM$ entonces M es diagonal.
- (b) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales. Pruebe que $AB = BA$.
- (c) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS = D$. Suponiendo que $AB = BA$, verifique que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ conmutan y concluya que $S^{-1}BS$ es diagonal.

- P3.** (a) Demuestre que si A, B y $(A + B^{-1})$ son matrices invertibles, entonces $(A^{-1} + B)$ también es invertible y su inversa es $A(A + B^{-1})^{-1}B^{-1}$.
- (b) Sea C la siguiente matriz de n filas y n columnas triangular superior a coeficientes reales:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $N = C - I$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$. Demuestre que $N^n = 0$.

- (c) Demuestre que para las matrices C y N definidas en (b), se tiene que C es invertible y su inversa es:

$$C^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \dots + (-1)^{n-1}N^{n-1}.$$

- P4.** (a) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Se define la *traza* de A , denotado por $\text{tr}(A)$, como la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Por otra parte se define la función $f : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$f(A) = \text{tr}(AA^t).$$

Pruebe que:

- (1) Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

- (2) $f(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, además muestre que

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}.$$

Donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

- (3) $f(A) = \text{tr}(A^t A)$.

- (b) Sea $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ una matriz tal que la matriz $M^t M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible. Definamos la matriz $P \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ como

$$P = I_m - M(M^t M)^{-1} M^t,$$

donde I_m es la matriz identidad de orden m .

Pruebe que:

- (1) $P^2 = P$. Muestre además que $PM = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ es la matriz nula.
(2) La matriz $M^t M$ es simétrica y muestre que la matriz P también es simétrica.
(3) Pruebe que P no es invertible.