MA1102: Algebra Lineal
Profesora : María Leonor Varas (Sección 4)
Auxiliares : Sebastián Astroza & Andrés Zúñiga

Clase Auxiliar N° 11

29 de Octubre de 2009

P1 Calcule

$$det\left(\begin{bmatrix} \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix}\right)$$

HINT: Use las conocidas y famosísimas propiedades del determinante para simplificar los cálculos.

P2 Encuentre los valores y vectores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

P3 Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a) Suponga que A es una matriz *idempotente*, es decir, $A^2 = A$. Encuentre todos los valores posibles que puede tomar $det(A)$.

HINT: Encuentre y resuelva una ecuación en la variable $det(A)$.

b) Pruebe que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

HINT: Utilice n veces la propiedad 1 de la Proposición 5.2 que aparece en la Tutoría de la semana 10. Otra forma de hacerlo es usando la definición de determinante.

P4 Diga cuales de las siguientes matrices son diagonalizables y, si es así, diagonalice.

I) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

II) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

III) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

IV) $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

P5 a) Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ no invertible, simétrica tal que

$$Ker(A+I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

i) Demuestre que los valores propios de A son 0 y -1.

ii) Demuestre que $Ker(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

b) Sean $k, n > 1$. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^{k-1} \neq 0$ y $A^k = 0$. Demuestre que 0 es el único valor propio de A y concluya que A no es diagonalizable.

c) Sea $n > 1$. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que si A es diagonalizable entonces $Ker(A^2) \subseteq Ker(A)$

P6 ea $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal tal que
$T(x) = \langle v, x\rangle\, v$.

a) Pruebe que $Im(T) = \langle\{v\}\rangle$ y que $Ker(T) = \langle\{v\}\rangle^{\perp}$.

b) Pruebe que $dim\,(Ker(T)) = n-1$.

c) Sea $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base de $\langle\{v\}\rangle^{\perp}$. Pruebe que $v_1, \ldots, v_{n-1}$ son vectores propios de T asociados al valor propio 0.

d) Pruebe que T es diagonalizable, i.e., que existe una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de T.

Estrategia que nunca falla para responder a la pregunta: ¿es A diagonalizable?

Pregunta: ¿Es $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable?

a) Mire la matriz. Si es simétrica entonces **es diagonalizable**. Si no lo es vaya directo al paso b.

b) Calcule $|A - \lambda I|$ y sus raices. Si hay raices complejas **A no es diagonalizable**. Si no hay raices complejas pase a c.

c) Si las n raices reales son distintas entonces **A es diagonalizable**. Si no es así, vaya al paso d.

d) Para las raíces repetidas resuelva el sistema $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$. Obtenga la dimensión del espacio solución ($mg(\lambda)$) y compárela con $ma(\lambda)$.

Si $mg(\lambda) < ma(\lambda)$ (para alguno de los lambda) entonces **A no es diagonalizable**. Si $ma(\lambda) = mg(\lambda)$ para todos los λ entonces **A es diagonalizable**.