



Clase Auxiliar N° 9

15 de Octubre de 2009

P1 Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y $MS_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices simétricas con coeficientes reales de 2×2 . Se define la transformación lineal $T : MS_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ por

$$T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = c + (b + a)x + 2ax^2$$

Considere además las bases $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\beta' = \{1, x, x^2\}$.

- Calcular la matriz A , representante de T con respecto a estas bases $(\beta$ y $\beta')$.
- Encuentre la transformación lineal $S : MS_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ cuya matriz representante relativa a las bases β y β' es A^t

P2 Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea $\varphi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal cuya representación matricial, con respecto a las bases canónicas es la matriz A .

- Encontrar la fórmula general de φ .
- Encontrar una base de $\text{Ker} \varphi$ y de $\text{Im} \varphi$.

P3 Considere $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = \frac{A+A^t}{2}$

- Pruebe que T es lineal.
- Encuentre $\text{Ker}(T)$ y calcule $\text{rango}(T)$.
- Considere la siguiente base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Calcule la matriz representante de T cuando la base del espacio de partida y de llegada es β .

- Usando matrices de pasaje (o de cambio de base) encuentre la matriz representante de T cuando en el espacio de partida y de llegada considera la base canónica.

P4 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$.

- Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal que satisface $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$. Demuestre que:
 - $T \circ T = 0$
 - n es par y el rango de T es $\frac{n}{2}$

b) Sea $F : V \rightarrow V$ una transformación lineal que satisface $F \circ F = 0$. Demuestre que:

1) $Im(F) \subseteq Ker(F)$.

2) Si n es par y el rango de F es $\frac{n}{2}$, entonces $Im(F) = Ker(F)$.

P5 Sea E un *ev* sobre $\mathbb{K}$. Sean V, W *sev* de E tal que $V \cap W = \{0\}$ y $S : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Se define $T : V \oplus W \rightarrow W$ como

$$T(x) = x_w + S(x_v), \quad \text{donde } x = x_v + x_w, \text{ con } x_v \in V, x_w \in W$$

a) Pruebe que T es lineal.

b) Si $\beta_v = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\beta_w = \{w_1, \dots, w_m\}$ son bases de V y W , respectivamente, demuestre que $\beta_{vw} = \beta_v \cup \beta_w$ es base de $V \oplus W$.

c) Si se sabe que A_S es la matriz representante de S con respecto a las bases β_v y β_w , calcule la matriz representante de T con respecto a las bases β_{vw} y β_w .

d) Pruebe que $\{v_1 - S(v_1), \dots, v_n - S(v_n)\}$ es base de $Ker(T)$.

e) Muestre que T es sobreyectiva. *HINT*: use TNI .

Si estudió las 55 horas no tiene nada de qué preocuparse. XD