



Clase Auxiliar N°7

24 de Septiembre de 2009

P1 Sea $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Considere los subconjuntos W_1 , W_2 de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ siguientes:

$$W_1 = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0\} \quad W_2 = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A_{11} + A_{22} = 0\}$$

- Demuestre que W_1 es un s.e.v. de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$
- Demuestre que W_2 es un s.e.v. de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$
- Encuentre una base y la dimensión de W_1
- Encuentre una base y la dimensión de W_2
- Encuentre una base y la dimensión de $W_1 \cap W_2$
- ¿Cuál es la dimensión de $W_1 + W_2$?

P2 Sea $T : \mathcal{P}_4 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$T(p) = p(1) + 2P(-1)$$

- Pruebe que T es lineal
- Encuentre base de $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$. ¿Qué puede decir de la función?

P3 Encuentres todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que:

$$\text{Ker}(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \quad \text{y} \quad \text{Im}(T) = \text{Ker}(T)$$

P4 Sea $m = 2n$ con $n > 0$ y considere el conjunto $\mathcal{P}_m(X)$ polinomios de grado menor igual a m a coeficientes reales.

Se define:

$$V = \{p(X) \in \mathcal{P}_m(X) \mid \forall i \in \{0, \dots, m\}, a_i = a_{m-i}\}$$

- Probar que V es un s.e.v. de $\mathcal{P}_m(X)$ sobre los reales
- Encontrar una base de V y deduzca su dimensión
- Probar que $\mathcal{P}_m(X) = V \oplus \mathcal{P}_{n-1}(X)$
- Se define:

$$V' = \{p(X) \in \mathcal{P}_m(X) \mid \forall i \in \{0, \dots, m\}, a_i = -a_{m-i}\}$$

Asumiendo que V' es un s.e.v. de $\mathcal{P}_m(X)$ pruebe que

$$\mathcal{P}_m(X) = V \oplus V'$$

P5 Pruebe que:

A invertible $\Leftrightarrow$ todo sistema $Ax = b$ tiene solución

HINT: Usea Teorema Núcleo Imagen

P6 Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, lineal, tal que

$$\text{Ker}(f) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \quad \text{y} \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Indicar (justificando) $\dim(\text{Ker}(f))$ y una base del mismo

b) Encuentre $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, para todo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

c) Encuentre una base de $\text{Im}(f)$

d) ¿Es f inyectiva? ¿Epiyectiva?

Recuerditos muy básicos de Transformaciones Lineales:

- Una **Transformación Lineal** es un función T

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\rightarrow Av \end{aligned}$$

con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, tal que:

- $T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$
- $T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$

- Sea $T : U \rightarrow V$ una transformación lineal

- T inyectiva $\Leftrightarrow \text{Ker}(T) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(T)) = 0$
- T epiyectiva $\Leftrightarrow \text{Im}(T) = V \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$
- Si T es inyectiva entonces

$$\{u_i\}_{i=1}^k \text{ es l.i. en } U \Rightarrow \{T(u_i)\}_{i=1}^k \text{ es l.i. en } V$$

- **Teorema Núcleo Imagen (T.N.I.):** Sean U, V e.v. sobre un cuerpo K , $T : U \rightarrow V$ una transformación lineal con $\dim(U) < \infty$. Entonces:

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

- Corolarios T.N.I:

- Si $\dim(U) = \dim(V)$ entonces

$$T \text{ inyectiva} \Leftrightarrow T \text{ epiyectiva} \Leftrightarrow T \text{ biyectiva}$$

- $\dim(U) > \dim(V) \Rightarrow T$ no puede ser inyectiva
- $\dim(U) < \dim(V) \Rightarrow T$ no puede ser epiyectiva
- $U \cong V \Leftrightarrow \dim(U) = \dim(V)$

- Estudien!