FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1102: Algebra Lineal
Profesora : María Leonor Varas (Sección 4)
Auxiliares : Sebastián Astroza & Andrés Zúñiga

Ejercicio Resuelto (y playero) de LDU

8 de Septiembre de 2009

P1.- Encuentre la descomposición LDU de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

Sol: Antes de empezar a resolver el ejercicio, haremos una observación con respecto a los pasos involucrados en el escalonamiento, existen varias notaciones, las cuales resumimos a continuación, al menos las más usadas:

- "En fila q poner $\alpha fila_p + \beta fila_q$". Es la más intuitiva, significa que deben sumar la fila p ponderada por α y la fila q ponderada por β y poner el resultado en la fila q. Note que sólo cambia la fila q de la matriz.
- $E_{pq}(\alpha, \beta)$ tiene exactamente el mismo significado que la notación anterior. Recuerde que $E_{pq}(\alpha, \beta)$ corresponde a un tipo de matriz elemental(mire con cuidado su cuaderno de Algebra lineal).
- La notación que usaremos es $E_{pq}(\alpha)$. En realidad $E_{pq}(\alpha)$ es una forma resumida de escribir la matriz $E_{pq}(\alpha, 1)$. Es decir, sumo la fila p ponderada por α con la fila q (ponderada por 1).

Como comentario, cualquiera de las notaciones usadas lleva al mismo resultado, pues en realidad son distintos nombres para el mismo procedimiento. Lo importante es que, en cualquiera de los casos las elecciones de α, β produzcan los ceros que necesitamos para escalonar la matriz.

Ahora vamos al ejercicio:

$$\text{Comenzamos escalonando la matriz } A \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Premultiplicando por } E_{12}(-2) \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Premultiplicando por } E_{13}(1) \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Premultiplicando por } E_{23}(-3) \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya que terminamos de escalonar A[1] podemos escribir L como:

[1] Llamaremos $\tilde{A}$ a la matriz A escalonada.

$$
\begin{aligned}
L &= [E_{23}(-3)E_{13}(1)E_{12}(-2))]^{-1} \\
&= E_{12}(-2)^{-1}E_{13}(1)^{-1}E_{23}(-3)^{-1} \\
&= E_{12}(2)E_{13}(-1)E_{23}(3) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Si sólo nos interesara calcular la descomposición LU de A, podríamos decir que:

$$
U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Y así:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

sería la descomposición LU de A.

Pero, para hacer este ejercicio más completo, calcularemos la descomposición LDU de A.

Como ya tenemos L, sólo nos falta encontrar U y D. Encontrar D es súper fácil, pues D es la matriz diagonal cuya diagonal es igual a la de la matriz $\tilde{A}$:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Finalmente, U es la matriz triangular superior con unos en la diagonal, tal que al multiplicar $D \cdot U$ obtengamos la matriz $\tilde{A}$. Con esto, podemos escribir U:

$$
U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Note que para encontrar U basta con dividir la fila i de $\tilde{A}$ por D_{ii}[2].

Con esto, la descomposición LDU de A nos queda:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

[2]Esto proviene de la regla que nos dice que si D es matriz diagonal, entonces la fila i-ésima de la matriz $D \cdot A$ es la fila de A ponderada por D_{ii}