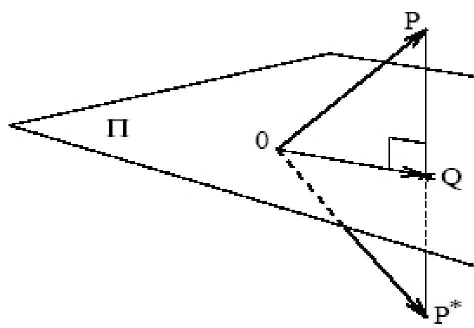
Clase Auxiliar N° 5

3 de Septiembre de 2009

P1 Considere el plano Π de ecuación $x+y-z=0$ y la recta L de vector director $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ que pasa por el origen. Se define el punto simétrico del punto P respecto del plano Π como aquel punto del espacio que se encuentra sobre la recta perpendicular al plano Π y que pasa por P, a la misma distancia del plano que P pero en la dirección contraria.



a) Considere $L^{'} = \left\{P \in \mathbb{R}^3 \;:\; P \text{ es el simétrico respecto de } \Pi \text{ de algún punto en } L\right\}$. Pruebe que $L^{'}$ es una recta y dé la ecuación de dicha recta.

b) Calcular la ecuación del plano $\Pi^{'}$ perpendicular al plano Π que contiene a la recta L (dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales).

c) Probar que $L^{'} \subseteq \Pi^{'}$

P2 Sea $P = \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$ y Π_1 el plano que pasa por el origen y tiene directores $d_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

a) Calcule la proyección ortogonal P_0 de P sobre el plano Π_1

b) Calcule la ecuación de la recta L que se obtiene como la intersección de Π_1 con el plano Π_2 de ecuación $x+2y=2$

c) Calcule la proyección ortogonal de P_0 sobre la recta L

d) Calcule la distancia de P a la recta L

P3 Sea Π_0 el plano con vectores directores $(0,1,1)$ y $(1,0,2)$ y que pasa por el origen.

a) Escriba la ecuación normal del plano Π_0.

b) Encuentre la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por $P=(1,1,1)$ y no corta a Π_0.

c) Calcular la proyección de P sobre Π_0.

d) Calcular la distancia entre Π_0 y Π.

$\boxed{\textbf{P4}}$ Sean L_1 y L_2 los conjuntos solución de los sistemas:

$$L_1 \begin{cases} x+z & =1 \\ \alpha x+y+z & =0 \end{cases} \quad , \quad L_2 \begin{cases} 2\alpha x+y+z & =1 \\ x+y+z+2 & =0 \end{cases}$$

a) i) Resuelva los sistemas L_1 y L_2 y decida para qué valores de α los conjuntos L_1 y L_2 son rectas. En adelante considere que L_1 y L_2 son rectas.

ii) Escriba ecuaciones vectoriales para L_1 y L_2.

iii) Determine el valor de α para que L_1 y L_2 sean ortogonales y, para ese valor de α, verifique que $L_1 \cap L_2 = \phi$.

b) Considere el plano

$$\Pi : x+y+z=1$$

Determine las coordenadas del punto proyección del origen sobre el plano Π y calcule la distancia del origen al plano Π.

$\boxed{\textbf{P5}}$ *a*) Sean A, B matrices de $n \times m$ con coeficientes reales. Pruebe que

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \ , \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \langle Ax, y\rangle = \langle Bx, y\rangle$$

b) Sean A, B matrices de $n \times n$ **simétricas** con coeficientes reales. Pruebe que

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$$

c) Demuestre que si una matriz cuadrada A verifica $A^k = I$ para algún natural $k \geq 1$, entonces A es invertible (I es la matriz identidad).

Recuerditos de Geometría

- La **RECTA** L que pasa por P y va en la dirección de d es el siguiente conjunto:

$$L = L_{P,d} = \{v \in \mathbb{R}^n \ \mid \ v = p + td \ \ , \ \ t \in \mathbb{R}\}$$

- La recta que pasa por P y tiene como vector normal a n es el siguiente conjunto (en $\mathbb{R}^2$):

$$L = \left\{v \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ \langle v - P, n\rangle = 0\right\}$$

- Recta que pasa por los puntos P y Q:

$$L : \quad P + t(Q-P) \ \ , \ \ t \in \mathbb{R}$$

- El **PLANO** que pasa por P y tiene vectores directores d_1 y d_2 es el conjunto:

$$\Pi_{P,d_1,d_2} = \{v \in \mathbb{R}^n \ \mid \ v = P + sd_1 + td_2 \ \ s, t \in \mathbb{R}\}$$

- El Plano que pasa por P y tiene como vector normal a n es el siguiente conjunto (en $\mathbb{R}^3$):

$$\Pi = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ \langle v - P, n\rangle = 0\right\}$$

- El plano que pasa por los puntos P, Q y R no colineales es:

$$\Pi : \quad P + t(Q-P) + s(R-P) \ \ t, s \in \mathbb{R}$$