Auxiliar Extra Examen - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Martes 1 de Diciembre, 2009

Profesora Cátedra: Maya Stein
Profesores Auxiliares: Victor Carmi Lara - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. *(Inducción y Sumatorias)*

a) Demuestre, sin usar inducción, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k+i} < 1$

b) Se define $H_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\ \forall n \geq 1$

b.1) Demuestre que: $H_{2^k} \leq 1 + k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

b.2) Demuestre que: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pregunta 2. *(Teorema del Binomio)*
Calcule la siguiente suma: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j^2 p^j (1-p)^{n-j} \binom{n}{j}$
<u>Indicación</u>: $j^2 = j(j-1) + j$

Pregunta 3. *(Ecuaciones en $\mathbb{Z}_n$)*
Determine si las ecuaciones $3x^2 + x + 2 = 0$ y $x^2 + 2x + 4 = 0$ poseen soluciones en $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ respectivamente

Pregunta 4. *(Ecuaciones en $\mathbb{C}$)*

a) Resuelva la ecuación: $x^2 - 2\cos\theta \cdot x + 1 = 0$, con $\theta \in \mathbb{R}$ fijo.
b) Encuentre todas las raíces del polinomio: $p(x) = x^{2n} - 2\cos\theta \cdot x^n + 1$, con $\theta \in \mathbb{R}$ fijo y $n \geq 2$.
c) Factorice en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ el polinomio anterior para $n = 3$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$

Pregunta 5. *(Más de Complejos)*
Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine las siguientes sumas:
$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos k\alpha$ y $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin k\alpha$
<u>Indicación</u>: Pruebe primero que: $S_n + iS'_n = (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n$

Pregunta 6. *(Polinomios)*

a) Se sabe que el polinomio $p(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8$ no admite raíces reales y que una de ellas tiene módulo 2. Determine todas las raíces de $p(x)$

b) Queremos probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, para ello, se le sugiere:

b.1) Considere $(1+x)^{2n}$ y expréselo de dos formas distintas.
b.2) Recordando que un polinomio es cero solo si sus coeficientes son cero concluya.