Auxiliar 15 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Lunes 16 de Noviembre, 2009

Profesora Cátedra: Maya Stein
Profesores Auxiliares: Victor Carmi Lara - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Determine todos los morfismos que hay entre $(\mathbb{Z}_3, +)$ y $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

Pregunta 2. Calcule:

a) $\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} w_j$ con w_j raíz n-ésima de la unidad.

b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} w_j$ con w_j raíz n-ésima de un complejo cualquiera.

Pregunta 3.

a) Sean $(w_j)_{j=0}^{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad. Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ se tiene:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$$

b) Sea $m \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ y $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ el polinomio de grado m definido por:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

Demuestre que:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} p(w_j) = p(0)$$

Pregunta 4.

a) Resuelva la ecuación: $x^2 - 2\cos\theta x + 1 = 0$, con $\theta \in \mathbb{R}$ fijo.

b) Encuentre todas las raíces del polinomio: $p(x) = x^{2n} - 2\cos\theta \cdot x^n + 1$, con $\theta \in \mathbb{R}$ fijo y $n \geq 2$.

c) (Propuesto) Factorice en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ el polinomio anterior para $n = 3$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$

Pregunta 5.

a) Determinar los complejos a, b, c tales que el polinomio $p(x) = x^5 + ax^2 + b$ sea divisible por el polinomio $q(x) = x^3 + x^2 + cx + 1$

b) Sea $K = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ con la suma y producto usuales de $\mathbb{R}$. Asuma que $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo. Se define además $f : K \to K$ por $f(a + b\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}$. Pruebe que:

1) (Propuesto) f es un isomorfismo

2) Si $p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_i \in \mathbb{Q}$. Entonces, si $x_0 \in K$ se tiene $p(f(x_0)) = f(p(x_0))$. Concluya que si $a + b\sqrt{5}$ es raíz de $p(x)$, entonces $a - b\sqrt{5}$ también lo es.

3) Suponga que $gr(p) = 3$ y que $2 + \sqrt{5}$ es raíz. Concluya que $p(x)$ tiene una raíz en $\mathbb{Q}$

c) (Propuesto) Se sabe que el polinomio $p(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8$ no admite raíces reales y que una de ellas tiene módulo 2. Determine todas las raíces de $p(x)$

Trabajo Dirigido.

Sea $p(x)$ un polinomio mónico con $gr(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x - 1)$ y que los restos de sus divisiones por $(x - 2), (x - 3)$ y $(x - 4)$ son iguales.
Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.