Teorema del Binomio - Matemática II
Escuela de Verano, Universidad de Chile

17 de Enero 2009

Profesor Cátedra: José Zamora
Profesores Auxiliares: Rodrigo Chi - Francisco Unda - Matías Godoy - Orlando Rivera

Recordatorio. Recordemos el teorema del binomio, dados x e y dos números, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

En esta oportunidad intentaremos aprovechar este teorema, el cual siendo usado de forma apropiada, nos permitirá obtener el valor de algunas sumas.

Ejemplo. Determinar el valor de: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Notemos que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k}$ pues $1^n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ luego, tenemos precisamente el teorema del binomio, con $x = 1$ e $y = 1$, entonces: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$

Ahora pasemos a algo un poco menos directo:

Pregunta 1. (P2 Auxiliar 9) Determine el valor de las siguientes sumas:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$

Solución. a) Notemos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)! \cdot k} \cdot k = \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-k)!(k-1)!k} \cdot k = n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

El indice pasa a ser $k = 1$ pues para $k = 0$ se suma 0

Notemos que $(n-k) = (n-1) - (k-1)$ luego $(n-k)! = ((n-1) - (k-1))!$

Entonces: $\displaystyle\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \binom{n-1}{k-1}$. Luego, nuestra suma se reescribe como:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

Realicemos el siguiente cambio de índice: $u = k - 1$ luego, la suma parte en $u = 1 - 1 = 0$ y llega hasta $u = n - 1$. Luego, nuestra suma pasa a:

$$n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{u=0}^{n-1} \binom{n-1}{u} = n \sum_{u=0}^{n-1} \binom{n-1}{u} 1^u \cdot 1^{(n-1)-u}$$

Notemos que los términos dentro de la suma conforman justamente la suma dada por el teorema del binomio, en este caso se debe notar que el resultado estará en potencia $n-1$ y no n (noten que debe coincidir el limite superior de la suma con la potencia del término involucrado y con el coeficiente binomial), luego:

$$n\sum_{u=0}^{n-1}\binom{n-1}{u}1^u\cdot 1^{(n-1)-u} = n\cdot(1+1)^{n-1} = n\cdot 2^{n-1}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k = n\cdot 2^{n-1}$$

b) Al igual que en el caso anterior, primero 'trabajemos' un poco la suma:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\cdot\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\cdot(k+1)!}\cdot(-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\cdot(k+1)!}\cdot(-1)^k\cdot\frac{n+1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!(n+1)}{(n-k)!\cdot(k+1)!}\cdot(-1)^k\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(n-k)!\cdot(k+1)!}\cdot(-1)^k\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(n-k)!\cdot(k+1)!}\cdot(-1)^k$$

Notemos que $(n-k) = (n+1)-(k+1)$ luego $(n-k)! = ((n+1)-(k+1))!$

Luego, entonces: $\dfrac{(n+1)!}{(n-k)!\cdot(k+1)!} = \dbinom{n+1}{k+1}$. Luego, nuestra suma pasa a ser:

$$\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(n-k)!\cdot(k+1)!}\cdot(-1)^k = \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\cdot(-1)^k$$

Podemos observar que la suma que nos queda 'se parece' a la enunciada por el Teorema del binomio, sin embargo, aun tenemos algunos inconvenientes (tenemos $k+1$ en lugar de k y sumamos hasta n cuando el coeficiente binomial está con $n+1$), entonces, en primer lugar introduzcamos un cambio de variable, de modo solucionar, en primer término, el problema con tener a $k+1$ en vez de k. Sea $u = k+1$, luego, los limites de la suma pasan a ser, desde: $u = 0+1 = 1$ hasta $u = n+1$, además, $u = k+1 \Rightarrow k = u-1$, Luego:

$$\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\cdot(-1)^k = \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{u=1}^{n+1}\binom{n+1}{u}\cdot(-1)^{u-1}$$

Ahora estamos 'casi listos' solo nos falta el término $u=0$ en la suma y podremos aplicar el Teorema del Binomio, entonces, para lograr ello, sumemos y restemos este término, de modo tal que no se altere nuestra igualdad.

$$\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{u=1}^{n+1}\binom{n+1}{u}\cdot(-1)^{u-1} = \left(\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0}\cdot(-1)^{0-1} - \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0}\cdot(-1)^{0-1}\right)$$

$$+\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{u=1}^{n+1}\binom{n+1}{u}\cdot(-1)^{u-1} = -\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0}\cdot(-1)^{0-1} + \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{u=0}^{n+1}\binom{n+1}{u}\cdot(-1)^{u-1}$$

$$= -\frac{1}{n+1}\cdot 1\cdot(-1)+\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{u=0}^{n+1}\binom{n+1}{u}\cdot(-1)^{u-1} = \frac{1}{n+1}+\sum_{u=0}^{n+1}\binom{n+1}{u}\cdot\frac{(-1)^u}{-1}\cdot 1^{(n+1)-u}$$

$$= \frac{1}{n+1}-\sum_{u=0}^{n+1}\binom{n+1}{u}\cdot(-1)^u\cdot 1^{(n+1)-u}$$

Notemos que finalmente hemos logrado 'armar' una suma que satisface el teorema del binomio, notando nuevamente que no importa que sumemos hasta $n+1$ pues tanto el el coeficiente binomial como la potencia de uno de los integrantes de la suma también son equivalentes a $n+1$, por lo tanto:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}-\sum_{u=0}^{n+1}\binom{n+1}{u}\cdot(-1)^u\cdot 1^{(n+1)-u} = \frac{1}{n+1}-(1+(-1))^{n+1} = \frac{1}{n+1}-0^{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

En definitiva:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$