Ejercicio 15:
Determine:
a)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

b)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}$$

Ejercicio 16:
a) Demuestre que

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$$

b) Entienda, usando el triangulo de Pascal, porqué

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$$

Ejercicio 17: Pruebe sin usar inducción que:

$$\sum_{k=n}^{2n} k = 3\sum_{k=0}^{n} k$$

Ejercicio 18:
a) Pruebe que para todo $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ vale:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$$

b) Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$(1 + \frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Ejercicio 19:
a) Cuantas maneras hay de sentar n personas en una mesa redonda, si consideramos iguales dos ordenes cuando cada persona tiene el mismo vecino a la izquierda y el mismo vecino a la derecha?
b) Cuantas maneras hay de elegir una contraseña en un alfabeto de n letras?
c) Cuantas maneras hay de dividir $2n$ personas en dos equipos de tamaño n?
d) Cuantas maneras hay de dividir n personas en dos equipos que ahora pueden tener diferentes tamaños?
e) Cuantas maneras hay de seleccionar de n personas dos equipos de tamaño k cada uno (suponiendo que $n \geq 2k$)?
f) Cuantas maneras hay de seleccionar de n personas dos equipos de tamaño

k cada uno si de antemano ya habiamos elegido dos personas que deben jugar, pero en equipos opuestos?
g) Si A es un conjunto con n elementos, cuantas k-tuplas $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ existen que tienen la propriedad $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots \subseteq B_k \subseteq A$?

Ejercicio 20:
Sea A un conjunto finito no vacío. Sea $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ el conjunto de todos los subconjuntos de A que tienen cardinalidad par, y sea $C \subseteq \mathcal{P}(A)$ el conjunto de todos los subconjuntos de A que tienen cardinalidad impar. Muestre que $|B| = |C|$.

Ejercicio 21:
Encuentre una biyección entre los intervalos $[0, 1]$ y $[0, 1)$ de la recta real (si es que existe una biyección).

Ejercicio 22:
Sea $S(0, 1)$ el conjunto de las sequencias $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ con $a_i \in \{0, 1\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Existe una biyección entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $S(0, 1)$?

Ejercicio 23:
Sean A y B conjuntos con $A \subseteq B$. Sea A numerable, y sea B no numerable. Demuestre que $B \setminus A$ no es numerable.

Ejercicio 24:
Demuestre que el subconjunto $\mathcal{P}_{fin}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, que consiste de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, es numerable.

Ejercicio 25:
Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto. Definimos $B(X)$ como el conjunto de todas las funciones biyectivas $f : X \to X$. Recuerda que $\circ$ es la composicion de funciones.
a) Demuestre que $(B(X), \circ)$ es un grupo.
b) Demuestre que $(B(X), \circ)$ es abeliano si y solamente si $|X| \leq 2$.

Ejercicio 26:
Sea $(G, \star)$ un grupo, y sea $i : G \to G$ una función dado por $i(g) = g^{-1}$. Llamaremos un subconjunto A de X *simétrico* si $i(A) = A$.
Demuestre/responde:
a) Sea $B \subseteq G$. Si $i(B) \subseteq B$ entonces B es simétrico.
b) Para cada $B \subseteq G$ se tiene que $B \cup i(B)$ y $B \cap i(B)$ son simétricos.
c) Es verdad que para $B \neq \emptyset$, se tiene que $(B \cup i(B), \star)$ es un subgrupo de $(G, \star)$?

Ejercicio 27:
Encuentre un subgrupo H no-trivial de $(\mathbb{Z}_6, +)$. Demuestre que H es isomorfo a un cierto grupo que ya conocemos.

Ejercicio 28:
Supongamos que dos alumnos encontraron diferentes soluciones H_1 y H_2 al

ejercicio anterior. Cual es la mayor diferencia entre $|H_1|$ y $|H_2|$ que puede ocurrir?

Ejercicio 29:
Sea $(G, \star)$ un grupo abeliano finito con $G = \{e, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$, donde e es el neutro de G. Demuestre que $(a_1 \star a_1) \star (a_2 \star a_2) \star (a_3 \star a_3) \star \dots \star (a_k \star a_k) = e$.