Auxiliar Extra Control 1 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Martes 8 de Septiembre, 2009

Profesora Cátedra: Maya Stein
Profesores Auxiliares: Victor Carmi Lara - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos cualquiera. Pruebe que existe una familia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ disjunta tal que:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Pregunta 2. Sea $f : A \to B$ y $C \subseteq A$. Se define: $g : C \to B$ tal que $g(x) = f(x) \ \ \forall x \in C$
Demuestre que: $\forall D \subseteq B, \ \ g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$

Pregunta 3. Sea $U \neq \emptyset$ un conjunto universo. Se define la función $f : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ por $f(X, Y) = X \setminus Y$.
Pruebe que $f^{-1}(\{U, \emptyset\}) = \{(U, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : X \subseteq Y\}$

Pregunta 4. Sea A un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función biyectiva. Denotaremos por f^{-1} a la inversa de f. Para $n \geq 1$ definimos $f^{(n)}$ como la composición de f consigo misma n veces. Si $n < 0$ definimos $f^{(n)} = (f^{-1})^{(|n|)}$. Si $n = 0$ se define $f^{(0)} = id_A$.
Considere la relación en A definida por:

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ n \in \mathbb{Z}\ f^{(n)}(x) = y$$

En base a lo anterior, pruebe que:

a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) Considere $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fijo. Si $A = \mathbb{Q}$ y $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, se define $f(q) = p \cdot q$. Calcule $[0]_{\mathcal{R}}$ y $[1]_{\mathcal{R}}$.

Pregunta 5. Sean n rectas en el plano, las cuales dividen al plano en R_n regiones, algunas no acotadas. Pruebe que es posible colorear estas regiones, donde dos regiones adyacentes (que comparten un segmento) tienen distinto color, usando dos colores.

Pregunta 6. Se considera la sucesión recurrente definida por:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2, \quad a_1 = 14$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, el número: $\sqrt{3(a_n^2 - 4)}$ Es divisible por 4.