Introducción al Algebra

Profesora de Cátedra	:	Maya Stein
Profesor Auxiliar	:	Víctor Carmi
		Matías Godoy

Lunes 31 de Agosto 2009

Clase Auxiliar

1. Sean:
   $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \text{ tal que } (\forall i \in \mathbb{N})|f(i+1) - f(i)| = 1\}$
   $\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \text{ tal que } f(0) = 0\}$
   Se definen en $\mathcal{F}$ las siguientes relaciones:
   $f \leq g \Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N}) f(i) \leq g(i)$
   $f \sim g \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\forall i \in \mathbb{N}) f(i) - g(i) = k$

   a) Demuestre que la relación $\sim$ es de equivalencia.

   b) Demuestre que $(\forall f \in \mathcal{F})(\exists g \in \mathcal{F}_0) f \sim g$

   c) Demuestre que $(\exists h \in \mathcal{F}_0)$ tal que $(\forall f \in \mathcal{F}_0) h \leq f$

   d) Sean $f, g \in \mathcal{F}_0$. Demuestre que $(\forall i \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{Z}) f(i) - g(i) = 2k$

Trabajo Dirigido

1. Considere el conjunto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en A por:
   $(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1.b_2) \Leftrightarrow a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$

   a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

   b) Calcular explícitamente $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$.

   c) Pruebe que A=$[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}}$.

   d) Pruebe que existe una biyección $f : [(1,0)]_{\mathcal{R}} \to [(0,0)]_{\mathcal{R}}$.

2. Sea $\mathcal{Q}$ una relación en $\mathbb{R}$. Sea $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f \text{ es función } \}$. Además definimos en A la relación $\mathcal{R}$ por: $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow (\exists n \geq 0)(\forall k \in \{0, ..., n\}) f(k)\mathcal{Q}g(k)$.

   a) Pruebe que $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f(0)\mathcal{Q}g(0)$

   b) Pruebe que si $\mathcal{R}$ es una relación de orden entonces $\mathcal{Q}$ también lo es.

   c) Pruebe que si $\mathcal{Q}$ es una relación de equivalencia entonces $\mathcal{R}$ también lo es.