Ejercicio 1:

Se define el conectivo lógico NAND de la siguiente manera:
p NAND q es falso si y solamente si tanto p cuanto q son verdaderos.
a) Define los conectivos $^{-}$, $\vee$, $\wedge$ y $\Rightarrow$ solo usando NAND.
b) Define NAND usando $^{-}$, $\vee$, $\wedge$ y $\Rightarrow$.
c) Vale conmutatividad para NAND?
d) Vale asociatividad para NAND?
e) Define un nuevo conectivo lógico $*$ tal que los leyes de Morgen valen para $*$ y NAND.

Ejercicio 2:

Determine el valor lógico de:
a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) m > n$,
b) $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) m > n$,
c) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) m < n$,
d) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) m < n$,
e) $\overline{(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) m < n}$,
f) $(\exists n \in \mathbb{N})\overline{(\forall m \in \mathbb{N}) m < n}$,
g) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\overline{m < n}$,
h) $(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\overline{m < n}$,
i) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\overline{m < n}$,

Ejercicio 3:

a) Determine el producto cartesiano de $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \vee x \leq 3\}$ con $\mathbb{Z}$.
b) Determine $X = (A \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times A)$.

Ejercicio 4:

Pruebe o encuentre un contra-ejemplo:
a) Para todos conjuntos A, B, C vale $A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$.
b) Para todos conjuntos A, B, C vale $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$.

Ejercicio 5:

Sea $A = \{1, 2\}$ y sea $B = \{A\}$. Determine:
a) $A \cap \mathcal{P}(A)$.
b) $(\mathcal{P}(B))^C$ con respecto al universo $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
c) $(A \times A)^C$ con respecto al universo X del ejercicio 3b).

Ejercicio 6:

Son funciones las siguientes relaciones?
a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 1\}$
b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y = 1\}$
c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x + y^2 = 1\}$

Ejercicio 7:

Son inyectivas/sobreyectivas/biyectivas las siguientes funciones?

a) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(a, b) = a + b$
b) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(a, b) = ab$
c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(a) = (a, 2a)$
d) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(x, y) = (y, x)$
e) $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $f(X) = X \cap B$
f) $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $f(X) = X \cup (A \setminus B)$
En los últimos dos, A y B son conjuntos con $B \subseteq A$.

Ejercicio 8:
Invente tres funciónes biyectivas: $f : (0, 1] \to [-5, -2)$, $g : (0, 1) \to \mathbb{R}^+$ y $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 9:
Considere la funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - x$, donde $|x|$ denota el valor absoluto de x.
a) Esta funcion es inyectiva/sobreyectiva?
b) Encuentre conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tales que $g : A \to B$, $g(x) = |x| - x$, es biyectiva.
c) Determine la inversa de g.

Ejercicio 10:
Sean $f : A \to B$ y $g : B' \to A$ funciones, donde A, B, B' y C son conjuntos tales que $B \subseteq B'$.
a) Si sabemos que f y g son inyectivas, podemos deducir que $g \circ f$ también lo es?
b) Si sabemos que f y g son sobreyectivas, podemos deducir que $g \circ f$ también lo es?

Ejercicio 11:
Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones. Demuestre:
a) Si $g \circ f = id_A$, entonces f es inyectiva.
b) Si $f \circ g = id_B$, entonces f es sobreyectiva.
c) Prueba, usando b), que la función dada en el ejercicio 7b) es sobreyectiva.
d) Prueba, usando a), que la función dada en el ejercicio 7c) es inyectiva.