AUX 3

(1)

P1 Sea g una función continua en a y $f(x) = (x-a)g(x)$, Calcular $f'(a)$ por definición:

R1

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h-a)g(a+h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}g(a+h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} g(a+h)$$

$= g(a)$ pues g es continua en a $\Rightarrow$ $f'(a) = g(a)$

P2 Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen lo siguiente:

1. $g(x) = x f(x) + 1$ y $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$
2. $g(a+b) = g(a)\, g(b)$

Demostrar que: $g'(x) = g(x)$ (POR DEFINICIÓN).

R2)

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)g(h)-g(x)}{h}.$$

$$= g(x)\lim_{h\to 0} \frac{g(h)-1}{h}. \longrightarrow$$

Pero $g(x) = x f(x)+1$

$$\frac{g(h)-1}{h} = f(h).$$

$$= g(x)\lim_{h\to 0} f(h)$$

POR INDICACIÓN

$$= g(x).$$

P3) Considere la función $f(x) = \frac{a}{2}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$, $a>0$.

a) Demuestre que: $f'(x) = \frac{-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

b) La tangente trazada a la curva definida por $y=f(x)$ en un pto. $P(x_0,y_0)$ cualquiera de ella, corta al eje OY en un punto T. Pruebe que la longitud PT es constante (independiente de $P(x_0,y_0)$).

R3)

a) $$f'(x) = \frac{a}{2}\left(\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1\cdot -2x}{2(a^2-x^2)^{1/2}}\left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right) - \left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)\cdot -\frac{1\cdot -2x}{2(a^2-x^2)^{1/2}}}{\left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{(a^2-x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{-x\left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{x\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}\right) + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

(3)

$$f'(x) = \frac{a}{2}\left(\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{-2xa}{\sqrt{a^2-x^2}}}{(a-\sqrt{a^2-x^2})^{\cancel{2}}}\right) + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{-xa^2}{\left(a^2-(a^2-x^2)\right)\cdot\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{-a^2}{x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{-a^2+x^2}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-(a^2-x^2)}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-\sqrt{a^2-x^2}}{x}}$$

b) $y-y_0 = m(x-x_0)$.

$y-y_0 = \frac{-\sqrt{a^2-x_0^2}}{x_0}(x-x_0)$ Ec. de la recta.

- intersección con el eje y: $x_T=0$.

$\Rightarrow y_T = \sqrt{a^2-x_0^2} + y_0$

$d_{PT} = \sqrt{(y-y_0)^2+(x_T-x_0)^2} = \sqrt{a^2-x_0^2+(-x_0)^2} = \underline{a}$

$\Rightarrow d_{PT}$ es constante

P4

Se sabe que la función $f(x)$ satisface la ecuación diferencial:

$$f''(x) - K f'(x) = f(x).$$

Demostrar que la función $g(x) = f(x)\, e^{-Kx}$ satisface la ecuación diferencial:

$$g''(x) + K g'(x) = g(x).$$

R4)

$$g'(x) = f'(x)\, e^{-Kx} + f(x)(-K e^{-Kx}) = e^{-Kx}(f'(x) - f(x))$$

$$g''(x) = -K e^{-Kx}(f'(x) - K f(x)) + e^{-Kx}\underbrace{(f''(x) - K f'(x))}_{f(x)}$$

$$\Rightarrow g''(x) = -K e^{-Kx}(f'(x) - K f(x)) + e^{-Kx} f(x)$$

remplazando...

$$g''(x) + K g'(x) = \left(e^{-Kx} f(x) - K e^{-Kx}(f'(x) - K f(x))\right) + K\left(e^{-Kx}(f'(x) - K f(x))\right)$$

$$= e^{-Kx} f(x)$$

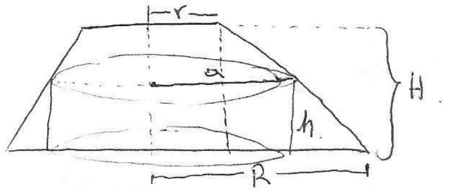
$$= g(x)$$

(5)

P5) El tronco de un arbol tiene una forma de cono de altura $H>0$ y radios superior r e inferior R, donde $R>r>0$. De este arbol se desea tallar un cilindro de madera de base circular de modo de maximizar su Volumen. Encuentre las dimensiones de este cilindro en término de los datos

R5)

de forma plana se tiene que



Por thales se tiene que: $\dfrac{H}{R-r} = \dfrac{H-h}{a-r} \Rightarrow H(a-r) = (H-h)(R-r)$.

$$Ha - \cancel{Hr} = HR - \cancel{Hr} - hR + hr$$

$$H(a-R) = h(r-R)$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{H(a-R)}{r-R}} \Rightarrow \boxed{h = \frac{H(R-a)}{R-r}}$$

∴ el volúmen del cilindro es:

$$V_c(a,h) = \pi a^2 h = \frac{H\pi}{r-R}(a-R)\cdot a^2 = \frac{H\pi}{R-r}(R-a)\,a^2 = \frac{H\pi}{R-r}(a^2R - a^3)$$

derivamos con respecto a "a" e igualamos a 0.

$$\Rightarrow \frac{H\pi}{R-r}(2Ra - 3a^2) = 0. \Rightarrow 2R\cancel{a} = 3a^{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2R}{3}}$$

ahora falta saber h...

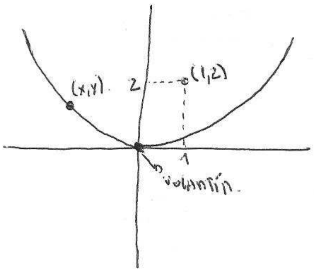
remplazando $\rightarrow$ $\boxed{h = \frac{HR}{3(R-r)}}$ $\therefore$ a, h valor que maximizan el volumen del cilindro

verificación de máximo con f''.

P6 Un grupo de físicos se encuentra en la estación espacial chilena "Volantín" estudiando la orbita del cometa "UCHC2". Ellos han determinado que esta órbita es parabólica de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$, tomando el origen en volantín y midiendo las longitudes en Unidades astronómicas Apropiadas (UAA). En este mismo sistema, el sol está en la posición $S = (1,2)$

Se sabe que por su composición química, "UCHC2", explotaría si su distancia al sol fuera menor o igual a 1 UAA; Para saber si el cometa explotará o no, se pide realizar lo siguiente: Escriba la distancia del cometa al sol en función de x, encuentre la menor distancia del cometa al sol y con esto concluya si explota o no

R6



$\rightarrow$ Distancia $= \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$

remplazando ahora $y = \frac{x^2}{4}$

$$\Rightarrow D(x) = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 2\right)^2}.$$

$$\Rightarrow D'(x) = \frac{1 \cdot 2(x-1) \cdot 2\left(\frac{x^2}{4} - 2\right) \frac{2x}{4}}{2\sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 2\right)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{4} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$\Rightarrow D(2) = \sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{2} > 1$$ (7)

$\Rightarrow$ el cometa no explota

(Verificar que es mínimo) $D'(x) < 0$ Para $x \in (-\infty, 2)$
$D'(x) > 0$ Para $x \in (2, \infty)$.

P7

Determinar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = sen(x^{\cos x}) + \cos(x^{sen x})$

b) $y = arc\ sen\left(\dfrac{3 sen x}{4+5\cos x}\right)$

R7

a) $y' = \cos(x^{\cos x})(x^{\cos(x)})' - sen(x^{sen(x)})(x^{sen(x)})'$

$$(x^{\cos(x)})' = (e^{\cos(x)\ln(x)})' = e^{\cos(x)\ln(x)} \cdot \left(-sen(x)\ln(x) + \frac{\cos(x)}{x}\right).$$

$$(x^{sen(x)})' = (e^{sen(x)\ln(x)})' = e^{sen(x)\ln(x)} \cdot \left(\cos(x)\cdot\ln(x) + \frac{sen(x)}{x}\right).$$

$\therefore$ remplazando se tiene ...

b). $y = arc\ sen\left(\dfrac{3 sen(x)}{4+5\cos(x)}\right)$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3sen(x)}{4+5\cos(x)}\right)}} \cdot \left(\frac{3\cos(x)(4+5\cos(x)) + 3sen^2(x)\cdot 5}{(4+5\cos(x))^2}\right).$$