Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar #9 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sánchez, Auxiliares: Gonzalo Contador, Mauro Escobar

P1. Sea $\alpha \in (0,1)$. Defina como $\mathfrak{R}$ la región encerrada entre la función x^α, la recta tangente a esta función en el punto $x = 1$ y el eje OY.

a) Pruebe que el área de $\mathfrak{R}$ está dada por la expresión $\dfrac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$

b) Pruebe que el volumen del solodo dado por la rotación de $\mathfrak{R}$ en torno al eje OY es $\pi\dfrac{\alpha(1-\alpha)}{3(2+\alpha)}$

c) Calcule el perímetro de $\mathfrak{R}$ para $\alpha = \frac{2}{3}$.

Solución

a) Tenemos que la recta tangente a x^α en un punto x cualquiera tiene pendiente $\alpha x^{\alpha-1}$, luego en $x = 1$ queda que la pendiente vale α. Como conocemos la pendiente y sabemos que la recta pasa por el punto (1,1), obtenemos que su ecuación es $y = \alpha(x-1)+1$. Así, notando que esta recta pasa sobre la función x^α ‘podemos calcular $\mathfrak{R}$ como la diferencia entre las areas bajo la recta tangente y la función, osea

$$\mathfrak{R} = \int_0^1 [\alpha(x-1)+1]dx - \int_0^1 x^\alpha dx$$

$$= \frac{\alpha}{2} - \alpha + 1 - \frac{1}{1+\alpha} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$$

b) Nuevamente, calculamos el volumen generado como la diferencia de los volumenes generados por la recta y por la función

$$V(\mathfrak{R}) = \int_0^1 2\pi x[\alpha(x-1)+1]dx - \int_0^1 2\pi x x^\alpha dx$$

$$= 2\pi(\frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\alpha}) = \pi\frac{\alpha(1-\alpha)}{3(2+\alpha)}$$

c) Si $\alpha = \frac{2}{3}$ queda que la recta $y = \frac{2x-2}{3} + 1$ pasa por el eje OY en $y = \frac{1}{3}$, luego, el largo del segmento vertical en el eje OY es precisamente $\frac{1}{3}$. El largo determinado por la recta tangente queda dado por la ecuación

$$L_{tangente} = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{4}{9}}dx = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

mientras que el largo del segmento determinado por $x^{\frac{2}{3}}$ entre 0 y 1 queda dado por

$$L_f = \int_0^1 \sqrt{1 + (\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}})^2}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx$$

y aquí hacemos el cambio de variables $u = x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9}$ con lo que $du = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}dx$ y la última integral se calcula como

$$L_f = \frac{3}{2}\int_{\frac{4}{9}}^{\frac{13}{9}} \sqrt{u}du$$

el cálculo explícito queda propuesto.

P2. Considere $0 < a < b$ y la circunferencia de ecuación $x^2 - (y-b)^2 \leqslant a^2$. Calcule el volumen del sólido obtenido al rotar esta circunferencia en torno al eje OX.

Solución

Se tiene que la relación que define el contorno de la circunferencia no es una función. Sin embargo, las partes superior e inferior de éste si lo son, y las podemos describir como

$$y_{sup}(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}$$
$$y_{inf}(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}$$

y con esto tenemos que el volumen generado por la rotación de la circunferencia en torno a OX (se forma como una especie de flotador) será la diferencia entre los volumenes engendrados por la parte superior e inferior

$$V = \pi\int_{-a}^{a} [y_{sup}^2 - y_{inf}^2]dx = \pi\int_{-a}^{a} [b^2 + 2b\sqrt{a^2 - x^2} + (a^2 - x^2) - b^2 + 2b\sqrt{a^2 - x^2} - (a^2 - x^2)]dx$$

$$= 4b\pi\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx = 8b\pi\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

Tomando $x = asen(u) \longrightarrow dx = acos(u)du$ queda que

$$V = 8b\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2sen^2(u)}acos(u)du = 8a^2b\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(u)du = 2a^2b\pi^2$$

Para concluir la última igualdad utilicé el hecho de que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(u)du = \frac{\pi}{4}$. Esto lo pueden verificar a mano, o bien aplicar el resultado del ejercicio 3 de la auxiliar 7, con $f(x) = x^2$.

P3. Sea $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n(x)dx$.

a) Muestre que se cumple la relación $I_{n+1} \leqslant I_n$

b) Muestre que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$

c) Calcule I_n para los casos n par y n impar

d) Concluya que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \binom{2n}{n} \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Solución

a) Basta notar que, como $sen(x) \leqslant 1$ y $sen^n(x) \geqslant 0$ en $(0, \frac{\pi}{2})$, se obtiene $sen^{n+1}(x) \leqslant sen^n(x)$. Integrando en el intervalo, se obtiene el resultado pedido.

b) De la parte anterior, se tiene $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$. Ahora bien

$$I_{2n+2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x) sen^2(x)dx$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)cos^2(x)dx$$

El primer término corresponde a I_{2n}. Para desarrollar el segundo, integramos por partes con $u = cos(x)$; $dv = sen^{2n}(x)cos(x) \longrightarrow v = \frac{sen^{2n+1}(x)}{2n+1}$; $du = -sen(x)dx$

$$-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)cos^2(x)dx = -\frac{sen^{2n+1}(x)}{2n+1}cos(x) \mid_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+2}(x)dx$$

$$= 0 - \frac{I_{2n+2}}{2n+1}$$

Reemplazando en la ecuación anterior, se despeja

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n}$$

Con lo que se tiene $\frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \Rightarrow \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$. Tomando límite, se concluye por teo. del sandwich que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$, lo que implica $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$.