Auxiliar 8: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sánchez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Mauro Escobar
8 de Octubre de 2009

P1. Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y continua en su dominio, derivable en $(0, +\infty)$ y con $f(0) = 0$. Para $x \in [0, +\infty)$ sea

$$F(x) = x \int_0^x f^2(t)dt.$$

Demostrar que F es creciente y convexa.

P2. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$ tal que $f(0) = 0$ y $\forall x \in (0, 1),\ 0 \leq f'(x) \leq 1$. Se pide probar que $\left[\int_0^1 f(t)dt\right]^2 \geq \int_0^1 f(t)^3 dt$, para lo cual proceda como sigue:

(i) Pruebe que $\forall x \in [0, 1],\ f(x) \geq 0$.

(ii) Se define $G : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $G(x) = 2\int_0^x f(t)dt - f(x)^2$. Muestre que G es creciente y deduzca que $\forall x \in [0, 1],\ G(x) \geq 0$.

(iii) Defina $F(x) = \left[\int_0^x f(t)dt\right]^2 - \int_0^x f(t)^3 dt$. Pruebe que $F'(x) = f(x)G(x)$, establezca el crecimiento de F y deduzca que $\forall x \in [0, 1],\ F(x) \geq 0$. Concluya.

P3. Calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x (x-1)\sin(t^2)dt}{\int_{x^2}^{x^3} \sin(t^2 - 1)dt}.$$

P4. Sea $f(x) = \int_1^x x \ln(xt)dt$, definida en $(0, +\infty)$.

(i) Encuentre $\int \ln(t)dt$ y calcule $f(2)$.

(ii) Demuestre que $f'(x) = (4x - 1)\ln(x),\ \forall x \in (0, +\infty)$.

P5. Asumiendo que $g(t) = \arcsin(\arctan(t))$ es continua en $[0, \tan(1)]$, encuentre la derivada de la función $f(x) = \int_0^{\tan(x)} \arcsin(\arctan(t))dt$ para $x \in [0, 1]$.

P6. (i) Sea $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - x$. Indique por qué f es integrable en $[0,2]$. Calcule la suma superior e inferior asociada a f y una partición equiespaciada de $[0,2]$ de n términos. Deducir el valor de la integral

$$\int_0^2 f(x)dx$$

(sin utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo).

(ii) Sea f una función creciente definida en $[0,1]$. Probar que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}.$$

(iii) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n\sqrt{n^2 + i^2}}.$$

P7. Considere la función $f : [1,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

(i) Calcule las sumas inferior $s(f,P)$ y superior $S(f,P)$ si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición que sigue una progresión geométrica, es decir, $x_i = q^i$, donde $q = \sqrt[n]{5}$. Nota: el resultado debe quedar sólo en términos de n.

(ii) Use el resultado anterior y el Teorema Fundamental del Cálculo para probar que $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{5} - 1) = \ln(5)$.