

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar #7 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sánchez, Auxiliares: Gonzalo Contador, Mauro Escobar

P1. Sea f diferenciable y definimos

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) f'\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

a) Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a))$

b) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n n \frac{\arctan(\frac{i}{n})}{i^2 + n^2}$

P2. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i^2 \pi^2}{n^2}\right)}\right)$

P3. Sea f integrable en $[0, \frac{\pi}{2}]$. Muestre que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin(x))}{f(\cos(x)) + f(\sin(x))} dx = \frac{\pi}{4}$$

P4. Muestre que la función definida mediante

$$h(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable sobre ningún intervalo de $\mathbb{R}$.