

AUXILIAR 6: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

PROFESOR: LEONARDO SÁNCHEZ

AUXILIARES: GONZALO CONTADOR - MAURO ESCOBAR

10 DE SEPTIEMBRE DE 2009

P1. (i) Para $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$ demuestre que

$$(1 + 2n)I_n = 2x^n \sqrt{1+x} - 2nI_{n-1}.$$

(ii) Pruebe que $I_n = \int \frac{e^{ax}}{x^n} dx$ para $n \geq 2$, satisface la recurrencia

$$I_n = -\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}I_{n-1}.$$

(iii) Sea f una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}$. Sea $I_n = \int e^{-x} f^{(n)}(x) dx$, donde $f^{(n)}$ denota la n -ésima derivada de f .

(a) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$I_n = I_{n+1} - e^{-x} f^{(n)}(x).$$

(b) Si $f^{(k)} = 0$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$I_0 = \int e^{-x} f(x) dx = -e^{-x} \sum_{i=0}^{k-1} f^{(i)} + C,$$

siendo C una constante real.

P2. Calcule integrando por partes

(i)

$$\int \sin(3x) \cos(2x) dx$$

(ii)

$$\int e^{-x} \ln(1 + e^x) dx$$

P3. Calcule realizando cambios de variables

(i)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

(ii)

$$\int \frac{1}{e^{3x} \sqrt{1-e^{-2x}}} dx$$

(iii)

$$\int \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx$$

(iv)

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx$$

P4. Calcule las siguientes primitivas vía fracciones parciales:

(i)

$$\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx$$

(ii)

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$$