Auxiliar 4: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sánchez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Mauro Escobar
27 de Agosto de 2009

P1. Determine el mayor volumen de un cilindro de radio r y altura h, donde $P = (h, r)$ recorre la recta $L : ay + bx = ab$, $a, b > 0$ y $a + b = 1$. Analizar para qué valor(es) de a este mayor volumen se maximiza.

P2. Sean $0 < a < b$. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), con $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a) = 0$. Demuestre que existe $c \in (a, b)$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. Analice que pasa si $a = 0$.

P3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Demostrar que si para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x) > 0$ y $f(x)f''(x) > (f'(x))^2$, entonces la función definida en $\mathbb{R}$ por $g(x) = \ln(f(x))$ es convexa.

P4. Estudiar el crecimiento de la función definida en $(0, +\infty)$ por $f(x) = x^{1/x}$, determinar el valor máximo alcanzado por la sucesión $\sqrt[n]{n}$.

P5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en $\mathbb{R}$. Dado un punto $a \in \mathbb{R}$ fijo, y un real $h > 0$, se define la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(t) = f(t) + f'(t) \cdot (a + h - t)$. Aplicar el teorema del valor medio a la función g para probar que existe $c \in (a, a + h)$ tal que

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + hf''(c)(a + h - c).$$

P6. Considere la función f definida en $(-1, +\infty)$ por $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1 + x)$.

(i) Calcular f', analizar crecimiento y determinar mínimos y máximos.

(ii) Caluclar f'', analizar convexidad y determinar puntos de inflexión.

(iii) Calcular $l = \lim_{x \to -1^+} f(x)$ y $L = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(iv) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones.

P7. A partir del desarrollo de Taylor en torno a 0 de $(x + a)^n$, con $n \geq 1$ entero, demuestre la fórmula del binomio

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k.$$

P8. Se requiere calcular el costo mínimo de un estanque para agua potable de 45π m^3 de capacidad que se construirá en forma de un cilindro circular de base plana y coronado por una semiesfera, sabiendo que los costos unitarios de obra son: base p $\$/m^2$, manto $3p$ $\$/m^2$, cúpula $4p$ $\$/m^2$ ($p > 0$). Siga las siguientes indicaciones:

(i) Si h es la altura del cilindro y r su radio, deduzca que:

$$h(r) = \frac{45}{r^2} - \frac{2}{3}r,$$

y muestre que el costo del estanque en función de r está dado por:

$$c(r) = \pi p[9r^2 + 6rh(r)].$$

(ii) Bosqueje la función de costo $c(r)$ en su dominio. Determine las dimensiones del cilindro (radio y altura) de manera que el costo del estanque sea mínimo y explicite el valor del costo mínimo. Justifique su respuesta.

P9. Se dispone de un alambre de largo $3a$, con el cual se desea formar un trapecio isósceles con 3 lados iguales a a y el cuarto de largo x de modo de maximizar su área. Determine el valor de x que cumple con esta condición extremal. Justifique su respuesta.

P10. El gráfico de $y = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ tiene un punto crítico en $P = (2, -1)$.

(i) Se pide determinar los valores de a y b y decidir si P es un máximo o un mínimo.

(ii) Investigue la existencia de otros puntos críticos y determínelos, si los hay.

P11. (i) Desarrolle mediante un polinomio de Taylor con resto, en torno a $x_0 = 0$, la función $f(x) = \sinh(x)$.

(ii) Calcule $\sinh(1)$ con tres términos no nulos del desarrollo anterior y estime una cota para el error (puede usar $2{,}5 < e < 3$).

P12. Calcule los siguientes límites:

(i) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^{-x} + xe^{-x})}{x^2}$.

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} x^{-2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

(iii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.