

AUXILIAR 2: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

PROFESOR: LEONARDO SÁNCHEZ

AUXILIARES: GONZALO CONTADOR - MAURO ESCOBAR

13 DE AGOSTO DE 2009

- P1.** Dado $a > 0$, sea $f : [0, 2a] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = f(2a)$. Pruebe que $\exists \bar{x} \in [0, a]$ tal que $f(\bar{x}) = f(\bar{x} + a)$.
- P2.** (i) Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) > 0$. Pruebe que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
(ii) Considere F y G continuas en x_0 y tales que $F(x_0) < G(x_0)$. Demuestre que existe $\delta > 0$ tal que $F(x) < G(x)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
- P3.** (a) Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas y epiyectivas. Demuestre que $\exists c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = g(c)$.
(b) El objetivo de esta pregunta es probar que toda función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq |x|$, alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ (i.e., $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(a) \leq f(x)$). Para ello considere $y_0 = f(0)$ y el intervalo $I = [-y_0, y_0]$.
(i) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus I, f(x) > y_0$.
(ii) Concluya que f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ en un punto en I .
- P4.** Dado $a \geq 0$, sea $f_a(x) = ax^3 + x - 1$.
(i) Demuestre la existencia y unicidad de $z \in [0, 1]$ tal que $f_a(z) = 0$.
(ii) Sea $g : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ la función que a cada $a \geq 0$ le asocia la solución $z \in [0, 1]$ de ecuación $f_a(z) = 0$. Pruebe que g es continua.
- Hint:** puede ser útil demostrar que, para $a, b \geq 0$,
- $$au^3 + u - 1 = 0 \quad \wedge \quad bv^3 + v - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad [b(u^2 + uv + v^2) + 1](u - v) = u^3(b - a).$$
- P5.** (i) Demuestre que la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es uniformemente continua.
(ii) Demuestre que la función $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ no es uniformemente continua.
- P6.** Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades:
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$,
 - f es continua en 0.

Demuestre que:

- (i) f es uniformemente continua,
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \cdot f(1)$.