

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar #1 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sánchez, Auxiliares: Gonzalo Contador, Mauro Escobar

P1. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en todo su dominio, y definamos la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ según la fórmula

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{Q} \\ g(x) & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pruebe que h es continua en $\bar{x} \in \mathbb{R}$ si y sólo si $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$.

P2. Considere $\theta \in \mathbb{R}$ y la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - \sin(\theta)}{x - \theta} & x \neq \theta \\ \cos(\theta) & x = \theta \end{cases}$$

Muestre que f es continua en $x = \theta$.

P3. Se dice que una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *lipchitziana de constante* $k \in \mathbb{R}$ si verifica la propiedad

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; |g(x) - g(y)| \leq k |x - y|$$

Pruebe que una función lipchitziana de constante k cualquiera es continua en todo su dominio.

P4. Sea h la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

donde α es una constante real cualquiera. Pruebe que h no puede ser continua para ningún valor de α .

P5. Sea f una función continua que satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y en su dominio. Pruebe que

$$f(x) = cx$$

y calcule explícitamente c .