Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA1002-04 Cálculo Diferencial E Integral

Auxiliar 12 Curvas en el Espacio

Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Sergio Castillo J. y Carlos Duarte C.

Semestre Primavera 2009

Fecha: Jueves 29 de Octubre de 2009

P1.- Una particula se mueve describiendo una trayectoria Γ sobre el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, de forma tal que $z = z(\theta)$ cumple $z'' = z$ con $z(0) = 1$ y $z'(0) = 0$, y z es de la forma $z = ae^{\theta} + be^{-\theta}$

a) Encuentre una parametrización de Γ.

Respuesta: Como estamos en un cilindro, trabajamos con coordenadas cilindricas

$$r(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z)$$

Primero notemos que $z(0) = 1 = a + b$, y que $z'(0) = 0 = a - b$, con lo que se concluye que $a = b = \frac{1}{2}$, así $z(\theta) = \frac{1}{2}e^{\theta} + \frac{1}{2}e^{-\theta}$. Ahora, solo falta ρ. Pero sabemos que la curva está sobre el cilindro, por lo cual satisface la relacion $x^2 + y^2 = 1$. reemplazando, se tiene $\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \rho = 1$. así, la parametrización de Γ es

$$r(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \frac{1}{2}e^{\theta} + \frac{1}{2}e^{-\theta})$$

b) Encuentre el vector tangente y normal, además calcule su longitud si $\theta \in [0, 2\pi]$

El vector tangente y normal quedan propuestos (se verá en la siguiente aux). La longitud de la curva responde a la formula

$$L_a^b(\Gamma) = \int_a^b \left\| \frac{dr}{d\theta} \right\| d\theta$$

dado que $r(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \frac{1}{2}e^{\theta} + \frac{1}{2}e^{-\theta})$, entonces $r'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, \frac{1}{2}e^{\theta} - \frac{1}{2}e^{-\theta})$, con lo cual

$$\left\| \frac{dr}{d\theta} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}e^{\theta} - \frac{1}{2}e^{-\theta}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}e^{\theta} + \frac{1}{2}e^{-\theta}\right)^2} = \frac{1}{2}e^{\theta} + \frac{1}{2}e^{-\theta}$$

Así

$$L_0^{2\pi}(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}e^{\theta} + \frac{1}{2}e^{-\theta}\right] d\theta = \frac{1}{2}\left(e^{2\pi} - 1 - e^{-2\pi} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)$$

P2.- Lemniscata de Bernoulli. Escribir la ecuación paramétrica del lugar constituido por todos los puntos cuyo producto de distancias a dos puntos dados

F_1 y F_2 tal que $d(F_1, F_2) = 2a$ $a > 0$ es una magnitud constante igual a a^2. Utilice coordenadas polares
Respuesta: Asumiendo que $F_1 = (0, a)$ y $F_2 = (0, -a)$, la distancia entre el punto y ambos puntos es

$$d(F_1, P) = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \quad d(F_2, P) = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

Multiplicando ambas se tiene que

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = a^2$$
$$\left((x-a)^2 + y^2\right)\left((x+a)^2 + y^2\right) = a^4$$

Haciendo un poco de álgebra, se tiene que

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Pasando a coordenadas polares, se tiene

$$\rho^4 = 2a^2\left(\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta\right) \Leftrightarrow \rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

La última es la ecuación de la lemniscata.

P3.- Como se aproxima Diciembre y con ello la Navidad, su mamá le pide que ponga el arbolito de pascua. Como ud. esta muy saturado con los examenes y controles en esa fecha, decide estafar a un amigo suyo que no sabe nada de cálculo. Para ello, ud le ofrece a su amigo \$10000 si pone los adornos por ud, con una pequeña particularidad: las luces deben ir desde la base a la punta siguiendo la relación

$$z(\theta) = e^{-\theta}$$

Si su amigo deja a medio hacer el arbol, ud. no le pagará nada. Para convencer a su amigo, proceda de la siguiente forma
a) Considere que su árbol de pascua tiene la forma de un cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ y parametrice la forma en que deben ir puestas las luces.
Solución: Usando coordenadas cilindricas se tiene $r(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$. Ahora como la curva está sobre el cono, se cumple la ecuación, por lo cual $\rho = z$, ahora, como $z = e^{-\theta}$, se tiene que

$$r(\theta) = (e^{-\theta}\cos\theta, e^{-\theta}\sin\theta, e^{-\theta})$$

b) Demuestrele a su amigo que con 3 metros de luces tiene de sobra para rodear por completo el árbol. ¿por qué estaría estafando a su amigo?hint: se define

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(x)dx$$

Solución: asumiendo que para rodear el arbol da infinitas vueltas (puede ud. verificarlo) se tiene que

$$L(Adorno) = \int_0^{\infty} \left\| \frac{dr}{d\theta} \right\| d\theta$$

Así, y como

$$r\,'(\theta) = \left(-e^{-\theta}\cos\theta - e^{-\theta}\sin\theta, -e^{-\theta}\sin\theta + e^{-\theta}\cos\theta, -e^{-\theta}\right)$$

$$\left\| \frac{dr}{d\theta} \right\| = \sqrt{3e^{-2\theta}} = e^{-\theta}\sqrt{3} \Rightarrow L(Adorno) = \int_0^{\infty} e^{-\theta}\sqrt{3}d\theta = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} e^{-\theta}\sqrt{3}d\theta = \sqrt{3}$$

Y la parametrización en longitud de arco de esta curva se calcula definiendo

$$s = \int_0^{\theta} e^{-\theta}\sqrt{3}d\theta \Rightarrow s(\theta) = \sqrt{3}\left(1 - e^{-\theta}\right)$$

despejando $\theta = \theta(s)$ se tiene

$$\theta(s) = -\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-s}\right)$$

Así, se tiene que que la parametrización en longitud de arco es, con $s \in [0, L(Adorno)]$

$$r(\theta(s)) = \left(\left(\frac{\sqrt{3}-s}{\sqrt{3}}\right)\cos\left[\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-s}\right)\right], \left(\frac{\sqrt{3}-s}{\sqrt{3}}\right)\sin\left[\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-s}\right)\right], \left(\frac{\sqrt{3}-s}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

P5.- Un alambre se enrolla sobre el manto de un cono de radio basal R y altura H de modo que su altura en función del ángulo θ está dado por la relación

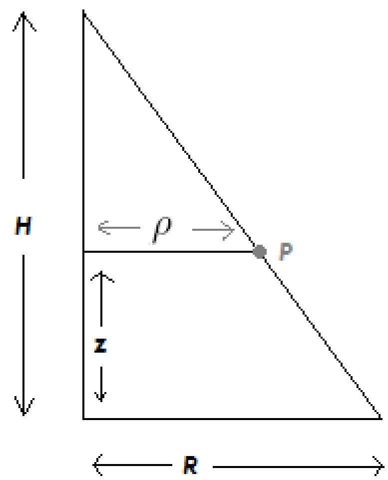
$$z(\theta) = H(1 - e^{-\theta})$$

encontrar la parametrización de la curva descrita por el alambre y calcular su largo cuando $\theta \in [0, \infty)$

Solución: Usaremos coordenadas cilindricas, por lo cual los puntos estan caracterizados por

$$r(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$$

primero notemos que z esta en función de θ, por lo cual solo falta ver que pasa con ρ. notemos que un cono tiene la siguiente forma



Por lo cual, usando el Teorema de Thales, se tiene que

$$\frac{H}{R} = \frac{H-z}{\rho}$$

Así, se tiene que $\rho = \frac{R}{H}(H-z)$, con lo cual $\rho(\theta) = \frac{R}{H}\left(H - H(1-e^{-\theta})\right) = Re^{-\theta}$, con lo cual se tiene que

$$r(\theta) = (Re^{-\theta}\cos\theta, Re^{-\theta}\sin\theta, H(1-e^{-\theta}))$$

Ahora calculemos el largo de la curva, sabemos que la formula es $L(Curva) = \int_0^\infty \left\|\frac{dr}{d\theta}\right\| d\theta$. Para esto calculamos, como siempre $\frac{dr}{d\theta}$

$$r\acute{}(\theta) = \left(-Re^{-\theta}\cos\theta - Re^{-\theta}\sin\theta, -Re^{-\theta}\sin\theta + Re^{-\theta}\cos\theta, He^{-\theta}\right)$$

$$\|r\acute{}(\theta)\| = \sqrt{R^2e^{-2\theta} + R^2e^{-2\theta} + H^2e^{-2\theta}} = e^{-\theta}\sqrt{2R^2+H^2}$$

Por lo cual $L(Curva) = \int_0^\infty e^{-\theta}\sqrt{2R^2+H^2}d\theta = \sqrt{2R^2+H^2}$. (Propuesto: calcule la parametrización en longitud de arco)

P6.- Sea $g : [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty)$ una función Riemann-Integrable y dos veces derivable con primitiva G que define una curva en $\mathbb{R}^2$, y tal que cumple con la siguiente propiedad

$$g\acute{}(x)^2\left\{g(x)^2 - 1\right\} = g\acute{}\acute{}(x)G(x) = 1$$

demuestre, parametrizando esta curva, que el largo de la curva entre $[0,t]$ está dado por $(g\acute{}(t)G(t) - g\acute{}(0)G(0)) - t$

Solución: Usando coordenadas cilíndricas, se tiene que $r(x,y)=(x,y)$, pero sabemos que $y=g(x)$, por lo cual, se tiene que

$$r(x)=(x,g(x))$$

El largo de esta curva es $L_0^t=\int_0^t \left\| \frac{dr}{dx} \right\| dx$, por lo cual, notemos que $r\acute{}(x)=(1,g\acute{}(x)) \Rightarrow \|r\acute{}(x)\|=\sqrt{1+g\acute{}(x)^2}$, pero por la propiedad se puede deducir que $g\acute{}(x)^2 g(x)^2=1+g\acute{}(x)^2$, por lo cual

$$L_0^t=\int_0^t \sqrt{g\acute{}(x)^2 g(x)^2}dx=\int_0^t g\acute{}(x)g(x)dx$$

Ahora, usando integración por partes, $u=g\acute{}(x) \ \ du=g\acute{}\acute{}(x)dx$, $dv=g(x)dx \ \ v=G(x)$

$$\int_0^t g\acute{}(x)g(x)dx=g\acute{}(t)G(t)-g\acute{}(0)G(0)-\int_0^t g\acute{}\acute{}(x)G(x)dx$$

Y usando la misma propiedad, pero la parte derecha,

$$g\acute{}(t)G(t)-g\acute{}(0)G(0)-\int_0^t g\acute{}\acute{}(x)G(x)dx=g\acute{}(t)G(t)-g\acute{}(0)G(0)-\int_0^t 1dx=g\acute{}(t)G(t)-g\acute{}(0)G(0)-t$$