Auxiliar 14 MA1A2-01

Primitivas y Teorema Fundamental del Cálculo

07/10/08

Profesor: Jaime González E.

Auxiliares: Carlos Duarte Conte y Sergio Castillo Jara

P1.- Demostrar que $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$ no depende de x. Calcule $F(x)$.

P2.- Sea $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}\ \forall x > 0$.

a) Demostrar que $L(ab) = L(a) + L(b)\ \forall a, b > 0$.
b) Demostrar que $L(a^n) = nL(a)\ \forall a > 0$.

P3.- Calcular las siguientes primitivas:

a) $I_1 = \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^3} dx$

b) $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}$
c) $I_3 = \int \arctan \sqrt{x^2-1} dx$
d) $I_4 = \int \frac{\sin(x)}{1+\sin^2(x)} dx$

P4.- Calcule una fórmula de recurrencia para:

$I_n = \int_0^a x^n \sqrt{a^2-x^2} dx$, $\forall n > 1$ con $n \in N$y luego calcule $\int_0^a x^5 \sqrt{a^2-x^2} dx$ para ello calcule previamente I_1.

P5.- a) Probar que $F(x) = -1 + \int_0^x e^{t^2} dt$ posee una sola raíz en $[0, 1]$.

b) Sea $g(x) = \int_x^{x+1} (x-t) f(t) dt$. Calcule g' y g''. Utilizando el Teorema del valor medio en $[x, x+1]$, pruebe que si f' es decreciente entonces g es convexa.
c) Sea f contínua. Defina F y G por $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ y $G(x) = \int_0^x f(t^2) dt$. Demuestre que $\int_0^u G(x) dx = uG(u) - \frac{1}{2} F(u^2)$.