Auxiliar 8: PAUTA

P1.- (Integral de Riemann) Considere una función $f: [a, b] \to [c, d]$ continua, biyectiva y estrictamente creciente.

a) Explique porqué f^{-1} es también integrable y estrictamente creciente.

Sol: Notar que f es continua, por ende f^{-1} es continua, y por teorema f^{-1} es integrable. Además es claro que f^{-1} es creciente ya que f es creciente

b) Considere la partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y su correspondiente partición imagen $Q = \{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ del intervalo $[c, d]$. Demuestre que

$$S(f, P) + s(f^{-1}, \mathrm{Q}) = \mathrm{bd} - \mathrm{ac}$$

Sol: Notemos que $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ dado que f es creciente. Además $s(f^{-1}, Q) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f^{-1})(f(x_i) - f(x_{i-1}))$

$$s(f^{-1}, Q) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

Así, sumando lo que aparece en el enunciado, se tiene que

$$S(f, P) + s(f^{-1}, Q) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i - f(x_{i-1})x_{i-1} = f(x_n)x_n - f(x_0)x_0 = bd - ac$$

c) Use apropiadamente las continuidades de f y f^{-1} para demostrar que

$$\int_c^d f^{-1} = bd - ac - \int_a^b f$$

Sol: Dado que f y f^{-1} son continuas, entonces son Riemann Integrable, por lo cual se cumple que

$$\lim_{|P| \to 0} S(f, P) = \lim_{|P| \to 0} s(f, P) = \int_a^b f$$

$$\lim_{|Q| \to 0} S(f^{-1}, Q) = \lim_{|Q| \to 0} s(f^{-1}, Q) = \int_c^d f^{-1}$$

Y, notando que $|P| \to 0$ cuando $n \to \infty$, y lo mismo para $|Q|$, se tiene que

$$\int_a^b f + \int_c^d f^{-1} = bd - ad$$

P2.- Sea $f(x)=\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$. Demuestre que se cumple $f'''(x)=2f(x)$.

Sol: Desarrollando el cuadrado de binomio

$$f(x)=\int_0^x (x^2-2tx+t^2)f(t)dt = x^2\int_0^x f(t)dt - 2x\int_0^x tf(t)dt + \int_0^x t^2 f(t)dt$$

Derivando, se tiene

$$f'(x)=2x\int_0^x f(t)dt + x^2 f(x) - 2\int_0^x tf(t)dt - 2xxf(x) + x^2 f(x)$$

$$f'(x)=2x\int_0^x f(t)dt - 2\int_0^x tf(t)dt$$

Volviendo a derivar, se tiene

$$f''(x)=2\int_0^x f(t)dt + 2xf(x) - 2xf(x) = 2\int_0^x f(t)dt$$

$$f'''(x)=2f(x)$$

P3.- Sea g una función dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Se define la función f mediante la regla

$$f(x)=\int_0^x g(x-t)sen(t)dt$$

Demostrar que se verifica la relación $f''(x)+f(x)=g(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Sol: haciendo el cambio de variable $u=x-t$, $du=-dt$ se tiene que la integral anterior es igual a

$$\begin{aligned}\int_x^0 -g(u)sen(x-u)du &= \int_0^x g(u)sen(x-u)du\\ &= \int_0^x g(u)\{sen(x)\cos(u)-\cos(x)\,sen(u)\}\,du\\ &= sen(x)\int_0^x g(u)\cos(u)du - \cos(x)\int_0^x g(u)sen(u)du\end{aligned}$$

Con lo cual, al derivar se obtiene

$$\begin{aligned}f'(x) = \cos(x)\int_0^x g(u)\cos(u)\,du + sen(x)g(x)\cos(x) + sen(x)\int_0^x g(u)sen(u)du\\ - \cos(\mathrm{x})\,\mathrm{g}(\mathrm{x})\mathrm{sen}(\mathrm{x})\end{aligned}$$

$$f'(x) = \cos(x)\int_0^x g(u)\cos(u)\,du + sen(x)\int_0^x g(u)sen(u)du$$

$$f''(x) = -sen(x)\int_0^x g(u)\cos(u)\,du + \cos(x)\,g(x)\cos(x) + \cos(x)\int_0^x g(u)sen(u)du + sen(x)g(x)sen(x)$$

Y recordando la identidad trigonométrica fundamental $cos^2(x) + sen^2(x) = 1$ se tiene que

$$f''(x) = g(x) - f(x)$$

Con lo cual se cumple lo pedido.

P4.- Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3} e^{t^2}dt}{\int_0^x \sin(t^2)\,dt}$$

Sol: Por l´hopital, al ser un limite de la forma $0/0$ se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3} e^{t^2}dt}{\int_0^x \sin(t^2)\,dt} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2e^{x^6}}{\sin\,(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{6xe^{x^6} + 18x^7e^{x^6}}{2xcos(x^2)}$$

En el último límite simplificando por x se tiene que el límite existe y vale 3.

$$\int_{2^5}^{4^5}\frac{dx}{x + x^{3/5}}$$

Sol: Usando el cambio de variables $p^5 = x$, $5p^4dp = dx$, la integral queda como

$$\int_2^4 \frac{5p^4dp}{p^5 + p^3} = \int_2^4 \frac{5pdp}{p^2 + 1} = \frac{5}{2}\,ln\left|\frac{17}{5}\right|$$

P5.- Para $n \in \mathbb{N}$ se define

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{4 - x^2}}dx$$

Calcule I_0 e I_1. Encuentre una recurrencia que permita calcular I_{n+2} en función de I_n.

(Propuesto. Hint: recuerde que es lo que siempre se emplea para resolver recurrencias)

P6- Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n\sqrt{n^2-i^2}}=1$$

Sol: La idea es identificar con una suma de Riemann. Tomando una partición equiespaciada en el intervalo $[0,1]$, lo que nos indica que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$, y $x_i = \frac{i}{n}$. Así

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n\sqrt{n^2-i^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}n}{n\sqrt{n^2-\left(\frac{i}{n}\right)^2 n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$$

Que es una suma de Riemann, por lo cual

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

La última integral se resuelve usando el cambio de variables $x = sen(u)$, $dx = \cos(u)\,du$ por lo cual

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sen(u)du=1$$

P7.- Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable, verificando que $f\big((a+b)-x\big) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

a) Probar que $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.
b) Sea ahora la función $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe que

$$\int_0^{\pi} x\, g(sen(x))dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} g(sen(x))dx$$

c) Deduzca que

$$\int_0^{\pi}\frac{x\, sen(x)}{1+cos^2(x)}dx=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$$

Y calcule el valor de la integral.