MA1002-4 Calculo Diferencial e Integral

Auxiliar 8: Integral de Riemann, TFC, TVM Integral

Prof. Cátedra: Raúl Gormaz

Prof. Auxiliar: Sergio Castillo – Carlos Duarte.

Fecha: Jueves 1 de Octubre de 2009

P1.- (Integral de Riemann) Considere una función $f:[a,b] \to [c,d]$ continua, biyectiva y estrictamente creciente.

a) Explique porqué f^{-1} es también integrable y estrictamente creciente.
b) Considere la partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$ y su correspondiente partición imagen $Q = \{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ del intervalo $[c,d]$. Demuestre que

$$S(f,P) + s(f^{-1}, \mathrm{Q}) = \mathrm{bd} - \mathrm{ac}$$

c) Use apropiadamente las continuidades de f y f^{-1} para demostrar que

$$\int_c^d f^{-1} = bd - ac - \int_a^b f$$

P2.- Sea $f(x) = \int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$. Demuestre que se cumple $f'''(x) = 2f(x)$.

P3.- Sea g una función dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Se define la función f mediante la regla

$$f(x) = \int_0^x g(x-t) sen(t) dt$$

Demostrar que se verifica la relación $f''(x) + f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

P4.- Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{t^2} dt}{\int_0^x \sin(t^2)\, dt}$$

$$\int_{2^5}^{4^5} \frac{dx}{x + x^{3/5}}$$

P5.- Para $n \in \mathbb{N}$ se define

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$$

Calcule I_0 e I_1. Encuentre una recurrencia que permita calcular I_{n+2} en función de I_n.

P6- Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n\sqrt{n^2 - i^2}} = 1$$

P7.- Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable, verificando que $f\big((a+b) - x\big) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

a) Probar que $\int_a^b x f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.
b) Sea ahora la función $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe que

$$\int_0^{\pi} x\, g(sen(x))dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} g(sen(x))dx$$

c) Deduzca que

$$\int_0^{\pi} \frac{x\, sen(x)}{1 + cos^2(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1 + x^2}\,dx$$

Y calcule el valor de la integral.