Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1002-04 Cálculo Diferencial E Integral
Auxiliar 02 Continuidad
Profesor: Raul Gormaz A..
Auxiliares: Sergio Castillo J. y Carlos Duarte C.
Semestre Primavera 2009
Fecha: 13 de Agosto de 2009

P1.- Sea $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

$$h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$$

Muestre que si h es contínua en $x = 1$ entonces es contínua en todo punto de su dominio. (ind: demostrar que $h(1) = 0$).

P2.- Dado $a \geq 0$, sea $f_a(x) = ax^3 + x - 1$

a) Demostrar la existencia y unicidad de $z \in [0, 1]$ tal que $f_a(z) = 0$.
b) Sea $g : [0, \infty) \to [0, 1]$, la función que a cada $a \geq 0$ le asocia la solución $z \in [0, 1]$ de la ecuación $f_a(z) = 0$. Pruebe que g es contínua. (Indicación para ambas partes: Demostrar que si $au^3 + u - 1 = 0$ y $bv^3 + v - 1 = 0$ entonces $(b(u^2 + uv + v^2) + 1)(u - v) = u^3(b - a)$)

P3.- Un conductor demora 5 horas en recorrer (aproximadamente) los 500 Km, que separan Santiago y Concepción. Pruebe que existe un tramo del viaje, de una longitud de 100 Km, que es recorrido en exactamente una hora. (Propuesto)

P4.- Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función contínua. Para $k \in \mathbb{N}$ se define

$$g(x) = f(x + \frac{1}{k}) - f(x)$$

a) Demostrar que

$$\sum_{i=0}^{k-1} g(\frac{i}{k}) = f(1) - f(0)$$

b) Si $\forall x \in [0, 1 - \frac{1}{k}]$; $g(x) > 0$, demostrar que $f(1) > f(0)$.
c) Si $\forall x \in [0, 1 - \frac{1}{k}]$; $g(x) < 0$, demostrar que $f(1) < f(0)$.
d) Si $f(1) = f(0)$, demostrar que $\exists x_0 \in [0, 1 - \frac{1}{k}]$ tal que $f(x_0) = f(x_0 + \frac{1}{k})$.

P5.- Sean f y g funciones contínuas en $[a, b]$, $a < b$ y tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$. Pruebe que $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) =$

$-g(x_0)$ y para $f(x) = (x-a)^n$ y $g(x) = -(x-b)^n$ con $n \in \mathbb{N}$, verifique que se cumplen las condiciones anteriores, y calcule para este caso, el valor de $x_0 \in [a, b]$.

P6.- Sea un círculo de radio R al cual se le extrae un sector circular de ángulo θ, al unir los extremos de la parte resultante se forma un cono. Calcule el ángulo θ aproximado (en grados sexagesimales) tal que se maximiza el volúmen del cono. ($V_{cono} = \frac{\pi r^2 h}{3}$) Indicación: $\sqrt{2} \approx \frac{17}{12}$, $\sqrt{6} \approx \frac{49}{20}$.

Auxiliar 2 Continuidad
Jueves 13 de Agosto de 2009

Profesor: Raúl Gormaz.
Auxiliares: Carlos Duarte Conte – Sergio Castillo Jara

P0.- Sea f continua en $[a, b]$ y sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una familia de puntos de $[a, b]$ y sea $\{a_1, \dots, a_n\}$ escalares positivos. Demuestre que $\exists \gamma \in [a, b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) = \alpha f(\gamma)$$

Donde $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

P$\boldsymbol{\pi}$) Johnny Bravo vive a los pies de una montaña en una ciudad donde ya no tiene mujeres por conocer, y todas lo rechazan. Para su fortuna, el día 12 de agosto se realizará una fiesta que promete atraer a todas las mujeres que viven en el país, que será justo en la cima de la montaña que queda detrás de su casa, y empieza a las 22:00. A las 00:00 del día 12 Johnny comienza una caminata de 24 horas hasta la cumbre de la montaña, para llegar a tiempo. Una vez ahí, durante 6 horas intenta conquistar a la que se le cruce con su físico y su exótico "perreo" y luego baja la montaña de vuelta a su casa con varios moretones. La bajada le toma 1 hora. Demuestre que existen dos instantes, uno en el día 12 y otro en el día 13 en los que Johnny Bravo se encuentra a la misma distancia de su casa a la misma hora del día.