Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1002-02 Calculo Diferencial E Integral

Auxiliar 11 Parametrizaciones 2

Profesor: Jaime Gonzalez E.
Auxiliares: Carlos Duarte C. y Nicolás Riquelme C.

Semestre Primavera 2009
Fecha: Martes 03 de Noviembre del 2009

Curva $r: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $t \rightarrow r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Suave si admite parametrización $r \ de \ clase \ C^1$ (continuamente diferenciable)

Regular si admite parametrización suave tal que $r'(t) \neq 0$

Simple si admite parametrización $r \ inyectiva \ en \ [a,b]$

Cerrada si $r(a) = r(b)$

Longitud de arco $L = s(t) = \int_0^t \|r'(t)\| \, dt$

Vector tangente $\hat{T} = \frac{r'(t)}{\| r'(t)\|}$ (unitario)

Vector normal $\hat{N} = \frac{\hat{T}'(t)}{\|\hat{T}'(t)\|}$ (unitario)

Vector Binormal $\hat{B} = \hat{T} x \hat{N}$ (unitario)

Curvatura $k(s) = \left\| \frac{d\hat{T}}{ds} \right\|$

Torsión $\tau(s) = -\frac{d\hat{B}}{ds} \hat{N}(s)$

Coordenadas cilíndricas

$$r = \begin{pmatrix} rcos\theta \\ rsen\theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$r \in [0,R], \theta \in [0,2\pi], \ z \in [0,H],$$

Coordenadas esféricas

$$r = \begin{pmatrix} rsen\varphi cos\theta \\ rsen\varphi sen\theta \\ rcos\varphi \end{pmatrix}$$

$$r \in [0,R]\,,\theta \ \in [0,2\pi]\,,\varphi \ \in [0,\pi]$$

P1.- La cicloide se define como el lugar geométrico descrito por un punto solidario a una rueda (de radio R que gira sin resbalar.

a) Encontrar la parametrizacion para el caso en que a=R

b) Encontrar la parametrizacion en longitud de arco (considerar de aquí en adelante R=1)

c) Encontrar vector tangente, curvatura, vector normal y binormal

d) Encontrar la parametrizacion de una recta tangente a la cicloide en un Angulo fijo α

Sol:

a) Dadas las características de la cicloide, la parametrizacion es la siguiente

$$r = \begin{pmatrix} R\theta \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Rsen\theta \\ -Rcos\theta \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} R\theta - Rsen\theta \\ R - Rcos\theta \end{pmatrix}$$

Notemos que la curva es suave, y simple, pero no regular (para $\theta = 0, \|r(\theta)\| = 0$)

b)

$$r = \begin{pmatrix} \theta - sen\theta \\ 1 - cos\theta \end{pmatrix}$$

$$r' = \begin{pmatrix} 1 - cos\theta \\ sen\theta \end{pmatrix}$$

Luego la parametrizacion en longitud de arco será

$$L = s(\theta) = \int_0^\theta \|r'(\theta)\|\, d\theta = \int_0^\theta \sqrt{2(1 - cos\theta)}\, d\theta$$

Ocupamos que $cos2\theta = 1 - 2sen^2\theta$

$$s(\theta) = \int_0^{\theta} \sqrt{2(1 - cos\theta)}\, d\theta = \int_0^{\theta} 2sen\left(\frac{u}{2}\right) du = 4\left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

De aquí, debemos despejar $\theta(s)$

Luego

$$\theta(s) = 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)$$

$$r = \begin{pmatrix} \theta - sen\theta \\ 1 - cos\theta \end{pmatrix}$$

Así, la parametrizacion natural será

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right) - sen(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)) \\ 1 - \cos\,(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)) \end{pmatrix}$$

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right) - sen(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)) \\ 1 - \cos\,(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)) \end{pmatrix}$$

Ocupando que $cos2\theta = 2cos^2 - 1$ y además el valor de $sen(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right))$

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right) - 2\left(1 - \frac{s}{4}\right)\left(\frac{s}{2} - \frac{s^2}{16}\right) \\ 2 - s(1 - \frac{s}{8}) \end{pmatrix}$$

c) Ocupamos que $\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{d\hat{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\hat{T}}{dt} / \| r'(t) \|$ para decir que la curvatura vale

$$k(t) = \left\| \frac{d\hat{T}}{dt} \right\| / \| r'(t) \|$$

Ya que calculando la formula en función del parámetro s es siempre más complicado. Siempre es útil traspasar las definiciones a la variable de la parametrizacion escogida.

$$\hat{T} = \frac{r'(t)}{\| r'(t) \|} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - cos\theta)}} \begin{pmatrix} 1 - cos\theta \\ sen\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora $\frac{d\hat{T}}{dt} = \begin{pmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right)/2 \\ -\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)/2 \end{pmatrix}$

Luego

$$k(t) = \frac{\left\| \frac{d\hat{T}}{dt} \right\|}{\| r'(t) \|} = \left| \frac{1}{4sen\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right|$$

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Además, como estamos en el plano, el vector binormal será

$$\hat{B} = \hat{T}x\hat{N} = (0,0,1)$$

d) Parametrizamos la curva, resultando lo siguiente

$$v(t) = p + Tt$$

Donde p es cualquier punto de la recta, y T el vector tangente

Como nos piden para un determinado ángulo, solo debemos reconocer que el punto p será el de nuestra parametrizacion evaluado en el ángulo α, y el tangente será el anterior calculado, evaluado también en α

Luego

$$v(t) = t\begin{pmatrix} sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha - sen\alpha \\ 1 - cos\alpha \end{pmatrix}$$

P2.- Una partícula se mueve describiendo una trayectoria sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$ de forma tal que su altura zy el angulo θ en cilíndricas cumple la relación

$$z = e^{-\theta} \quad \theta \in [0, \infty[$$

a) Encuentre una parametrizacion de la curva.

b) Calcule el largo de 2 giros

Sol:

Como

$$z = e^{-\theta} \quad \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 = e^{-2\theta} \quad \Rightarrow R = e^{-\theta}$$

Así se conocen todos los parámetros de la parametrizacion en función de θ

$$r = \begin{pmatrix} e^{-\theta}cos\theta \\ e^{-\theta}sen\theta \\ e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

Notemos que la altura siempre decrece, partiendo en altura $z = 1$ y al infinito llegar al punto $z = 0$

$$L = s(t) = \int_0^t \|r'(t)\|\, dt$$

Calculemos

$$r'(t) = \begin{pmatrix} -e^{-\theta}cos\theta - e^{-\theta}sen\theta \\ -e^{-\theta}sen\theta + e^{-\theta}cos\theta \\ -e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

$$\|r'(t)\| = 3e^{-2\theta}$$

Luego

$$L = s(t) = \int_0^{4\pi} 3e^{-2\theta}\, d\theta = \frac{3}{2}(1 - e^{-8\pi})$$

P3. Considere la curva definida por la ecuación

$r(t) = \left(tsent, tcost, \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}\right) \quad t \in [o, 2\pi]$

Calcule la masa *M* de la curva, sabiendo que su densidad está dada por la ecuación $\rho = x^2 + y^2$

Sol:

La masa de la curva será

$$M = \int_0^{2\pi} \rho\, \|r'(t)\| dt$$

$$r'(t) = \left(sent + tcost, cost - tsent, \sqrt{2t}\right)$$

$$\|r'(t)\| = 1 + t$$

Luego

$M = \int_0^{2\pi} \rho\, \|r'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} x(t)^2 + y(t)^2 (\, 1 + t) dt$=$\int_0^{2\pi} ((tsent)^2 + (tcost)^2)(\, 1 + t) dt$

=$\int_0^{2\pi} t^2 (\, 1 + t) dt$=8$\frac{\pi^3}{3} + 4\pi^4$

P4. Considere las funciones $f(x) = senx$ *x* y *g(x)*=*x*(*x*-π) con $x \in [0, \pi]$Sea *R* la región encerrada entre los gráficos de las dos funciones.

a) Calcule el área de la región *R*.

$$A = \int_0^{\pi} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\pi} (senx - x^2 + x\pi) dx = 2 + \frac{\pi^3}{6}$$

b) Determine el volumen del sólido generado por la rotación de *R* en torno al eje *OY* .

$V = \; 2\pi \int_0^{\pi} x\big(f(x) - g(x)\big) dx = 2\pi(\pi + \frac{\pi^4}{12})$

c) Encuentre la posición del centro de gravedad de la región *R*.

Tenemos que

$x_g = \frac{\int_0^\pi x(f(x)-g(x))dx}{A} = \frac{\pi}{2}$

$y_g = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}(f(x)^2-g(x)^2)dx}{A} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^5}{60}$

d) Determine el largo de la curva $y = g(x)$.

Para esto se debe calcular

$$L = \int_0^\pi \sqrt{1 + (2x-\pi)^2}dx$$

Ocupando el cambio de variable
$2x - \pi = tan\theta\ y\ despues\ integracion\ por\ partes, se\ llega\ a\ que$

$L = \int_0^\pi \sqrt{1+(2x-\pi)^2}dx = \frac{1}{4}(2\pi\sqrt{1+\pi^2} + \ln(\frac{\sqrt{1+\pi^2}+\pi}{\sqrt{1+\pi^2}-\pi}))$