Clase Auxiliar 13

Profesor: Jorge San Martín
Auxiliares: Francisco Jiménez - Ramiro Villagra

Resumen

- Características de curvas: Sea $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ una parametrización regular de una curva simple Γ, $s:[a,b]\to[0,L(\Gamma)]$ la función en longitud de arco y $\vec{\sigma}=\vec{r}(t(s))$ la parametrización natural. Velocidad y rapidez: Se define velocidad como $\vec{v}(t)=\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)$ y rapidez: $v(t)=\left\|\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\|=\dfrac{ds}{dt}(t)$

	En longitud de arco s	Parámetro t cualquiera
Vector tangente	$T(s)=\dfrac{d\vec{\sigma}}{ds}(s)$	$T(t)=\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)\Big/\left\|\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\|$
Vector normal	$N(s)=\dfrac{dT}{ds}(s)\Big/\left\|\dfrac{dT}{ds}(s)\right\|$	$N(t)=\dfrac{dT}{dt}(t)\Big/\left\|\dfrac{dT}{dt}(t)\right\|$
Curvatura	$\kappa(s)=\left\|\dfrac{dT}{ds}(s)\right\|$	$\kappa(t)=\left\|\dfrac{dT}{dt}(t)\right\|\Big/\left\|\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\|$
Radio de curvatura	$R(s)=\dfrac{1}{\kappa(s)}$	$R(t)=\dfrac{1}{\kappa(t)}$
Vector Binormal	$B(s)=T(s)\times N(s)$	$B(t)=T(t)\times N(t)$
Torsión	$\tau(s)=-N(s)\cdot\dfrac{dB}{ds}(s)$	$\tau(t)=-N(t)\cdot\left(\dfrac{dB}{dt}(t)\Big/\left\|\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\|\right)$

- Fórmulas de Frenet: Utilizando lo ya dado, se tiene
  - $\frac{dT}{ds}=\kappa N$
  - $\frac{dN}{ds}=-\kappa T+\tau B$
  - $\frac{dB}{ds}=-\tau N$

- Integral de una función sobre una curva: Sea Γ una curva simple y regular en r^n, y sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función continua definida en $\Omega\subseteq\Gamma$. Se define la integral de f sobre la curva Γ mediante:

$$\int_\Gamma f dl=\int_a^b f(\vec{r}(t))\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\|dt$$

Ejercicios

P1 Sea $\vec{r}(t)=(Re^{-at}cos(t),Re^{-at}sen(t),t)$, con $t\in[0,4\pi]$. Determinar la parametrización de arco, la curvatura y el vector binormal en cada punto de la curva.

P2 Calcular la masa del alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ con el plano $x+y+z=0$ y cuya densidad de masa está dada por $\rho(x,y,z)=x^2$.

P3 Sea *Gamma* el grafo de una función diferenciable $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Determine una fórmula para la longitud de Γ. Suponiendo que f es dos veces diferenciable, prube que la curvatura en el punto $(x,f(x))$esta dada por

$$\kappa(x)=\frac{|f''(x)|}{|1+(f'(x))^2|^{3/2}}$$

.

P4 Sea $\sigma : [0, l_0] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva Γ. Suponiendo que $\sigma \in C^3$. Pruebe que:

- $\tau(s) = ([\sigma'(s) \times \sigma''(s)] \cdot \sigma'''(s)) / \|\sigma''(s)\|^2$.
- Use lo anterior para calcular la torsión de la hélice $\vec{r}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(cos(t), sen(t), t)$, con $t \in [0, 4\pi]$. Debe usar la parametrización en longitud de arco.

P5 Considere la curva Γ que se forma al intersectar las superficies

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + z^2 = 4 + y^2$$

tomando en cuenta que sólo la parte de la curva con $z > 0$.

- Encuentre una parametrización de Γ.
- Calcule el centro de masa dada por $\rho(x, y, z) = xy$

P6 Considere la parametrización $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{r}(t) = (cos^3(t), sen^3(t), 0)$. La la curva entre $[0, 2\pi]$ recibe el nombre de asteroide.

- Calcule le vector tangente, normal y binormal, la curvatura y la curvatura a la torsión en los puntos donde tenga sentido. Justifique brevemente.
- Calcule la parametrización en longitu de arco y el largo total de la curva.