Clase Auxiliar N°2 : Continuidad

Profesor: Jorge San Martín
Auxiliares: Francisco Jiménez - Ramiro Villagra

Resumen

Teorema de los valores intermedios (TVI)

1. Para $f(\bar{x}) = 0$: sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(a)f(b) \leq 0 \Rightarrow \exists \bar{x} \in [a,b]$ tal que $f(\bar{x} = 0)$
2. Para $f(\bar{x}) = e, e \in [c,d]$: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $c, d \in f([a,b]), c < d$, entonces $\forall e \in [c,d], \exists \bar{x} \in [a,b]$ tal que $f(\bar{x}) = e$

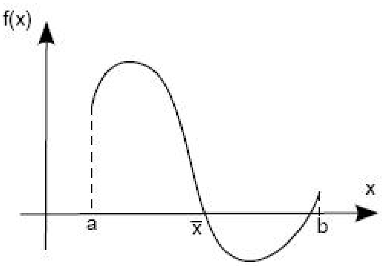

Figura 1: TVI para $f(\bar{x}) = 0$.

Teorema de Weierstrass
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces alcanza su máximo y mínimo en el intervalo.

Continuidad de funciones inversas
Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona, entonces $J = f(I)$ es intervalo y $f^{-1} : J \to I$ es continua

Continuidad uniforme
Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice uniformemente continua si:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0)(\forall x, y \in A)\, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

Teorema de la Continuidad uniforme
Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua ssi f es continua $\forall \bar{x} \in A$

Ejercicios

P1. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funcion continua en [a,b] Pruebe que existen $\underline{x}, \bar{x} \in [a,b]$ tales que:

$$f(\underline{x}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\bar{x}) \qquad \forall x_1, x_2 \in [a,b]$$

Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a,b]$ cualesquiera, existe $\beta \in [a,b]$ tal que:

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Solucion:

a) Sea $m = min\{f(x_1), f(x_2)\}, M = max\{f(x_1), f(x_2)\}$ y $d = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Claramente se tiene que el real d satisface la relacion:

$$m \leq d \leq M$$

Con lo que se tiene lo pedido, pues $\bar{x}$ es tal que $f(\bar{x}) = m$, a su vez $\underline{x} = x_1 + x_2 - \bar{x}$

b) Definimos la funcion auxiliar $g(x) = f(x) - \frac{f(a)+f(b)}{2}$, notamos que $g(x)$ es continua en $[a, b]$. Supongamos **sin perdida de generalidad*** que $f(a) = m$ y que $f(b) = M$, (tal como se definieron en la parte (a)) con lo que se tiene que:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq 0$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \geq 0$$

Luego por el TVI, $\exists \beta \in [a, b]$ tal que $g(\beta) = 0$, es decir:

$$g(\beta) = f(\beta) - \frac{f(a) + f(b)}{2} = 0$$

$$f(\beta) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Lo que conluye la demostracion.
*Nota: Al suponer $f(a) = M$ y que $f(b) = m$ se llega al mismo resultado.

P2. Dado $a > 0$ sea $f : [0, 2a] \to \Re$ continua y tal que $f(0) = f(2a)$. Pruebe que $\exists \bar{x} \in [0, a]$ tal que $f(\bar{x}) = f(\bar{x}+a)$

Solucion

Analogamente definimos la funcion $g(x) = f(x) - f(x + a)$. Como f es continua en $[0, 2a] \Rightarrow f(x + a)$ continua en $[0, a]$. Luego $g(x)$ continua en $[0, a]$ Ademas

$$\begin{aligned} g(0) \cdot g(a) &= \{f(0) - f(0 + a)\} \cdot \{f(a) - f(a + a)\} \\ &= \{f(2a) - f(a)\} \cdot \{f(a) - f(2a)\} \\ &= -\{f(2a) - f(a)\}^2 = -g(0) \leq 0 \end{aligned}$$

i.e. $\exists x_1 = 0, x_2 = a$ tales que $g(x_1) \cdot g(x_2) \leq 0$, es decir, la funcion cambia de signo en [0,a], luego por el TVI $\exists \bar{x} \in [0, a]$ tal que

$$g(\bar{x}) = 0 = f(\bar{x}) - f(\bar{x} + a)$$

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x} + a)$$

P3. Definimos la funcion en $\mathbb{R}$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(a) Verifique que tanh es continua en todo $\mathbb{R}$, que $\tanh(0) = 0$ y que satisface
$-1 < \tanh(x) < 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
(b) Pruebe que si $n \to \infty$ entonces $\tanh(n) \to 1$ y que $\tanh(-n) \to -1$
(c) Usando el T.V.I. demuestre que $\forall y \in (-1, 1) \ \ \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$.
Indicacion: Analice y>0, y=0, y<0.
(d) Demuestre que la ec. $\tanh(x) = cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$.

Solucion

(a)Dado que e^x es continua en todo $\mathbb{R}$, po algebra de funciones continuas, $\tanh(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
En efecto $tanh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{e^0 + e^{-0}} = \frac{0}{2} = 0$
Ademas:

$$-1 = -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{-e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \leq \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh(x) \leq \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \tanh(x) \leq 1$$

Es facil ver que $\tanh(x) \neq -1$ y $\tanh(x) \neq 1$ (Propuesto)

$$\Rightarrow -1 < \tanh(x) < 1$$

(b)Notemos que $\lim_{x\to\infty} \tanh(x)$ es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, utilizando algebra de limites

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} - \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 + 0 = 1$$

Nota: Analogamente se pude obtener que $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$

(c)Definimos la funcion auxiliar $g(x) = \tanh(x) - y$, sea $\bar{x} > 0, \underline{x} < 0$

$$g(\bar{x}) \cdot g(\underline{x}) = \{\tanh(\bar{x}) - y\} \cdot \{\tanh(\underline{x}) - y\}$$

Notemos que $\tanh(\bar{x}) > 0$, y $\tanh(\underline{x}) < 0$. Analicemos ahora los casos separadamente.
Si $-1 < y < 0$
$\tanh(\bar{x}) - y > 0 \quad \forall \bar{x} > 0$
$\tanh(\underline{x}) - y < 0$ para algun x pues como $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1 \quad \exists \underline{x} < 0$ tal que $\tanh(\underline{x}) < -y$

Si $0 < y < 1$
$\tanh(\bar{x}) - y > 0$ pues como $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1 \quad \exists \bar{x} > 0$ tal que $\tanh(\bar{x}) > y$
$\tanh(\underline{x}) - y < 0 \quad \forall \underline{x} < 0$

Si $y = 0$
$\tanh(\bar{x}) - y > 0 \quad \forall \bar{x} > 0$
$\tanh(\underline{x}) - y < 0 \quad \forall \underline{x} < 0$
En todos los casos $\exists \bar{x}, \underline{x}$ tales que la funcion cambia de signo, luego por el TVI $\forall y, \exists x$ tal que $g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \tanh(x) - y = 0$$

$$\tanh(x) = y$$

P4. Un monje vive en un monasterio a los pies de un monte. El dia 7 de cada mes a las 00:00 hrs, el monje comienza una cominata de 24 horas hasta la cumbre del monte. Una vez ahi, medita durante 6 horas y luego baja de vuelta al monasterio. La bajada le toma una hora. Demuestre que existen dos instantes, uno el dia 7 y otro el dia 8, en los que el monje se encuentra a la misma distancia del monasterio a la misma hora del dia.

Solucion

Sea d la distancia del monasterio a la cumbre del monte.

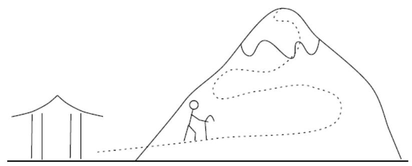

Figura 2: Problema del monje

Definamos las funciones:
$d_i(x)$:= distancia del monje al monasterio el dia i a la hora x.
$g(x) = d_7(x) - d_8(x)$ continua. Notemos que

$$\begin{aligned} g(0) \cdot g(24) &= \{d_7(0) - d_8(0)\} \cdot \{d_7(24) - d_8(24)\} \\ &= \{0 - d\} \cdot \{d - 0\} \\ &= -d^2 < 0 \end{aligned}$$

Por TVI $\exists x\ [0, 24]$ tal que $g(x) = 0 \Leftrightarrow d_7(x) = d_8(x)$ $\Rightarrow$distancia al monasterio es la misma a la misma hora del dia.

P5. Un conductor demora 5 horas en recorrer los 500 kms que separan Santiago y Concepcion. Pruebe que existe un tramo del viaje de una longitud de 100 kms que es recorrido en exactamente 1 hora.

Solucion

Sea $d(x)$:= la distancia total recorrida por el movil al instante x, continua. Definimos la funcion auxiliar: $g(x)$:= distancia recorrida durante los 60 min (1 hora) previos al instante x. Esta funcion la podemos formalizar como $g(x) = d(x) - d(x - 1)$

Para demostrar lo que nos piden, definimos $h(x) = g(x) - 100km$. Notemos que $h(x)$ es continua en [0,5] pues $g(x)$ lo es. Por demostrar que $h(x) = 0$ para algun $x \in [0, 5]$. Necesitamos encontrar x1,x2 tales que $h(x_1) \cdot h(x_2) \leq 0$.

Razonemos por contradiccion. Supongamos que no existen tales x_1, x_2 luego $\forall x_1, x_2 \in [0, 5]$
$h(x_1) \cdot h(x_2) > 0$, si tal cosa ocurre tenemos dos escenarios posibles:

Caso 1: $h(x_1) > 0$ y $h(x_2) > 0$ $\forall x_1, x_2 \in [0, 5]$. En tal caso es claro ver que

$$\sum_{i=1}^{5} g(x) = \sum_{i=1}^{5} h(x) + 100 > 500km$$

Contradiccion!! El enunciado dice que se recorren 500km en 5 horas.

Caso 2: $h(x_1) < 0$ y $h(x_2) < 0$ $\forall x_1, x_2 \in [0, 5]$. En tal caso es claro ver que

$$\sum_{i=1}^{5} g(x) = \sum_{i=1}^{5} h(x) + 100 < 500km$$

Contradiccion!!

Esto significa que no es posible que $\forall x_1, x_2 \in [0, 5]$ $h(x_1) \cdot h(x_2) > 0$, luego $\exists x_1, x_2 \in [0, 5]$ tales que $h(x_1) \cdot h(x_2) \leq 0$. Por el TVI $\exists \bar{x} \in [0, 5]$ tal que $h(\bar{x}) = 0$

$$\Leftrightarrow g(\bar{x}) = 100km$$

P6. Sean f y g continua en $[a,b], a < b$ y tales que $f(a) \neq f(b), f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$. Demuestre que $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x-a)^n$ con $n \in N \quad 0$ verifique que se cumplen las hipotesis anteriores y calcule para este caso el valor de x_0.

Solucion

Definimos como funcion auxiliar $h(x) = f(x) + g(x)$ continua, notemos que:

$$\begin{aligned} h(a) \cdot h(b) &= \{f(a) + g(a)\} \cdot \{f(b) + g(b)\} \\ &= \{-g(b) + g(a)\} \cdot \{-g(a) + g(b)\} \\ &= -\left(g(a) - g(b)\right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Por el TVI $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $h(x_0) = 0 \Rightarrow h(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 0$

$$\Rightarrow f(x_0) = -g(x_0)$$

P7. (a) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) > 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
(b) Considere F y G continuas en x_0 y tales que $F(x_0) < G(x_0)$. Demuestre que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) F(x) < G(x)$

Solucion

(a) De la caracterizacion $\epsilon - \delta$ de la continuidad de g en x_0.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Re \{|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leq \epsilon\}$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Re \{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leq \epsilon\}$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Re \{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow g(x_0) - \epsilon < g(x) < g(x_0) + \epsilon\}$$

Sabemos que dado $g(x_0) > 0$ y dado que la afirmacion se cumple $\forall \epsilon > 0$, en particular para $0 < \epsilon < g(x_0)$ se tiene que

$$0 < g(x_0) - \epsilon < g(x)$$

$\Rightarrow$ dado $\epsilon, 0 < \epsilon < g(x_0)$

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad g(x) > 0$$

(b) Basta tomar la funcion $H(x) = G(x) - F(x)$, que satisface que $H(x_0) = G(x_0) - F(x_0) > 0$. Luego usando la parte (a) se tiene inmediatamente que:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad H(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad G(x) > F(x)$$

P8. Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ continua. Demuestre que existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = x$.

Solucion

Sea $h(x) = f(x) - x$ continua. Es claro que dado que el recorrido de f es [a,b]:

$$h(a) = f(a) - a \geq 0$$
$$h(b) = f(b) - b \leq 0$$

Luego:

$$h(a) \cdot h(b) = (f(a) - a)(f(b) - b) \leq 0$$

Por el TVI $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $h(x_0) = 0 \Rightarrow h(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$

$$\Rightarrow f(x_0) = x_0$$

P9. Comprobar que la funcion $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $(0, 1)$ pero que en dicho intervalo no es uniformemente continua.

Solucion

Hay que demostrar que $(\exists\epsilon > 0)(\forall(\epsilon) > 0)(\exists x, y \in A)\, |x - y| \leq \delta \vee |f(x) - f(y)| > \epsilon$. Ya que podemos escoger x e y, tomemoslos tales que $x = y + \delta$. Tenemos:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x - y}{xy}\right| = \frac{d}{xy}$$

. Esto ya que $x, y > 0$, además, ya que podemos escoger ϵ, imponemos:

$$\frac{d}{xy} > 1 \Rightarrow \delta > x(x + \delta) \Rightarrow 0 > x^2 + \delta x - \delta$$

La solución de esta ecuación de segundo grado es:

$$x = \left[\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 + 4\delta}}{2}, \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4\delta}}{2}\right]$$

Como $x \in (0, 1)$, tenemos el intervalo $x \in \left(0, \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4\delta}}{2}\right]$ que es el intervalo en el que se cumple lo pedido para demostrar que no es uniformemente convergente.

P10. Analizar la convergencia uniforme de $sen(x)$ con $x \in \mathbb{R}$

Solucion

Demostremos que $sen(x)$ es uniformemente continua en $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ya que con argumentos similares se obtiene para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ y por la periodicidad, se concluye para todo $\mathbb{R}$. Sea $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tales que $|x - y| \leq \delta$. sin pérdida de generalidad $x > y$. por propiedad del seno:

$$x \geq sen(x) \wedge y \geq sen(y) \Rightarrow x - y \geq sen(x) - sen(y)$$

por tanto:

$$|sen(x) - sen(y)| \leq |x - y| \leq \delta$$

basta tomar por tanto $\delta = \epsilon$

P10. demostrar que si la funcion $f(x)$ es uniformente continua ne cada uno de los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces esta función es uniformente continua en el segmento total $[a, b]$

Solucion

Gracias al teorema para funciones en intervalos cerrados y acotados, basta verificar que f es continua en c. Para esto, hay que demostrar que $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a, b])\, |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$. para esto consideremos la continuidad uniforme por intervalos, tenemos: $(\forall \epsilon' > 0)(\exists \delta' > 0)(\forall x, y \in [a, b])\, |x - y| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon'$ $(\forall \epsilon'' > 0)(\exists \delta'' > 0)(\forall x \in [a, b])\, |x - c| < \delta'' \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon''$. Al ser ϵ dado, se escoge $\epsilon', \epsilon'' < \epsilon$ y por ser uniformemente continua en los intervalos $[a, c][c, b]$ obtenemos los δ', δ'' correspondientes. Sea $\delta < \delta', \delta''$. Finalmente, $\forall x \in [a, b]$ se tiene que $|f(x) - c| < \epsilon$.

P11. Se llama módulo de continuidad de una función $f(x)$ en el intervalo (a, b) la función:

$$\omega_f(\delta) = sup\left|f(x_1) - f(x_2)\right|,$$

donde x_1 y x_2 son puntos arbotrarios de (a,b), ligados por la condición $|x_1 - x_2| \leq \delta$.
Demostrar que, para la continuidad uniforme de la función f(x) en el intervalo (a, b). es necesario y suficiente que

$$lim_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0.$$

Solucion

Propuesto