MA1001-2 – Introducción al Cálculo

Profesor: Flavio Guíñez A.

Problema 1. Pruebe que la distancia de un punto $P = (x_0, y_0)$ a un recta L de ecuación general $ax + by + c = 0$ esta dado por:

$$\mathrm{dist}(P, L) = \frac{|a_{x_0} + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Solución: Observemos primero que si $a = 0$ y $b \neq 0$, esto es la recta L es la horizontal de ecuación $y = -\frac{c}{b}$, se tiene que $\mathrm{dist}(P, L) = |y_0 - (-\frac{c}{b})| = \frac{|by_0+c|}{|b|}$ que claramente satisface la igualdad de arriba – al hacer un dibujo queda más claro, además notar que no podemos quitar el módulo ya que nos sabemos si b es negativo o no. De forma análoga se puede mostrar para una recta horizontal con $a \neq 0$ y $b = 0$.

Entonces, asumamos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$ y así L es una recta oblicua. Sea $Q = (x, y)$ un punto cualquiera de L, y definamos $d = \mathrm{dist}(P, Q)$. Por la fórmula de distancia se tiene,

$$d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2. \tag{1}$$

Por otro lado Q esta en la recta, así que se tiene $ax + by + c = 0$. Pero podemos restar $ax_0 + by_0 + c$ a ambos lados y obtenemos, $a(x - x_0) + b(y - y_0) = -(ax_0 + by_0 + c)$. Elevando al cuadrado,

$$a^2(x - x_0)^2 + 2ab(x - x_0)(y - y_0) + b^2(y - y_0)^2 = (ax_0 + by_0 + c)^2,$$

y de donde

$$a^2(x - x_0)^2 + b^2(y - y_0)^2 = (ax_0 + by_0 + c)^2 - 2ab(x - x_0)(y - y_0). \tag{2}$$

Lo que conviene hacer ahora es formar la parte izquierda de (2) usando la igualdad (1). Para ello multiplicamos ambos lados de (1) por $a^2 + b^2$.

$$\begin{aligned}
(a^2 + b^2)d^2 &= a^2(x - x_0)^2 + b^2(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2 + b^2(y - y_0)^2 \\
&= b^2(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2 + [a^2(x - x_0)^2 + b^2(y - y_0)^2] \\
\text{y por (2),} \qquad &= b^2(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2 + (ax_0 + by_0 + c)^2 - 2ab(x - x_0)(y - y_0) \\
&= (ax_0 + by_0 + c)^2 + [b^2(x - x_0)^2 - 2ab(x - x_0)(y - y_0) + a^2(y - y_0)^2] \\
&= (ax_0 + by_0 + c)^2 + [b(x - x_0) - a(y - y_0)]^2.
\end{aligned}$$

Notar que en el último paso sólo armamos el cuadrado de binomio. Con esto ya casi estamos. Lo primero que debemos notar es que en la útima igualdad, sólo $[b(x - x_0) - a(y - y_0)]^2$ es un término variable (depende de los valores de x e y). Pero es el cuadrado de un número, así que siempre es mayor o igual a cero. De inmediato obtenemos que $(a^2 + b^2)d^2 \geq (ax_0 + by_0 + c)^2$.

¿Es posible que $(a^2 + b^2)d^2 = (ax_0 + by_0 + c)^2$? Para ello necesitaríamos que exista un $\hat{Q} = (x, y)$ en L tal que $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$. Pero observemos que esta es la ecuación de un recta L' que pasa por el punto $P = (x_0, y_0)$ y cuya pendiente es $\frac{b}{a}$. Luego dado que la recta L tiene pendiente $-\frac{a}{b}$, L' es exactamente la recta perpendicular a L que pasa por el punto P. Así concluímos que tal punto $\hat{Q}$ si existe y es la intersección entre L y L', de dónde finalmente obtenemos

$$\mathrm{dist}(P, L)^2 = \mathrm{dist}(P, \hat{Q})^2 = \frac{(a_{x_0} + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}.$$