MA1001, Auxiliar 7
Introducción al Cálculo
23 de Septiembre, 2009

Profesor : Raúl Uribe
Auxiliares: Benjamín Obando,Ramiro Villagra

1. Grafique la función:

$$f(x) = \mid 1 - 2\cos(x+\pi) \mid -1$$

Solución:

$$f(x) = \mid 1 + 2\cos(x) \mid -1$$

(i)Paridad:$f(-x) = \mid 1 + 2\cos(-x) \mid -1 = \mid 1 + 2\cos(x) \mid -1 = f(x)$. Así f es par.

(ii)Periodicidad: $f(x+2\pi) = \mid 1 - 2\cos(x+2\pi) \mid -1 = \mid 1 + 2\cos(x) \mid -1 = f(x)$.Así f es de periódo 2π.

(iii) Máximos y Mínimos: $Max(f) = 2$ cuando $\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $Min(f) = -1$ cuando $1 + 2\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(iv)Ceros de f: $f(x) = 0 \Rightarrow \mid 1 + 2\cos(x) \mid -1 = 0 \Rightarrow \cos(x) = \frac{-1\pm 1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$.

(v)Hacer el gráfico(propuesto).

2. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a)

$$\sqrt{2}\sin(x) = 1 - \sqrt{2}\cos x$$

b)

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = 1 + \sin(2x)$$

Solución:

(i)

$$\sqrt{2}\sin(x) = 1 - \sqrt{2}\cos x \mid \cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

Teniendo en cuenta que $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Podemos transformar la ecuación en:

$$\cos(\frac{\pi}{4})\sin(x) + \sin(\frac{\pi}{4})\cos x = \frac{1}{2}$$

Usando la propiedad $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$ podemos transformar la ecuación en:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

Y ya que $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.Tenemos que:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{6})$$

Así:

$$x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

(ii)

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 1 + \sin(2x)$$

Para este problema debemos considerar las siguientes propiedades trigonométricas $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ y $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$. Así remplazamos en la ecuación:

$$\frac{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = 1 + 2\cos(x)\sin(x)$$

$$\Rightarrow \sin(x)(2 + 2(\cos(x))^2 + \sin(2x)) = 0$$

Así debemos resolver $\sin(x) = 0$ y $2+2(\cos(x))^2+\sin(2x) = 0$. Pero notemos que $2 + 2(\cos(x))^2 + \sin(2x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Así la solución de la ecuación esta dada solo por $\sin(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Algunos Conceptos previos

(i) Un conjunto A se dice acotado superiormente si $\exists M, \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$, donde M se llamará cota superior.

(ii) Si A admite un supremo y M es una cota superior,se tiene que $sup(A) \leq M$, es decir, sup(A) es la menor cota superior de A.

(iii)**Axioma del Supremo**:En un conjunto A,acotado superiormente y no vacio, existe $sup(A)$.

(iv) Un conjunto A se dice acotado inferiormente si $\exists M, \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \geq M$, donde M se llamará cota inferior.

(v) Si A admite un infimo y M es una cota inferior,se tiene que $inf(A) \geq M$, es decir, inf(A) es la mayor cota inferior de A.

(vi) **Axioma del Supremo(para el Infimo)**:En un conjunto A,acotado inferiormente y no vacio, existe $inf(A)$.

(vii)**Propiedad de la Arquimediana**: $\forall x \in \mathbb{R}^{+} \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x > \frac{1}{n}$.

Notas:

(i) En la mayoria de los problemas en necesario justificar la existencia de supremos e infimos. Para esto la única herramienta que tenemos para conjuntos que no sean de una cantidad finita de elementos es el axioma del supremo.

(ii)Los problemas 4,5 y 6 intentan probar propiedades generales de los supremos de los conjuntos. En general la tecnica es separa el problema en dos desigualdades. Por ejemplo si queremos probar que $sup(A) = sup(B)$, primero debemos probar $sup(A) \leq sup(B)$ y despues probaremos $sup(B) \leq sup(A)$ lo que, como se vio al principio del curso, nos dice que necesariamente $sup(A) = sup(B)$.

(iii) En clase auxiliar para justificar la existencia del supremo de los conjuntos primero probamos que eran acotados superiormente y que eran no vacios, por ende por axioma del supremo estos existian. Este paso se puede omitir en las demostraciones(no así el argumento), ya que al intentar demostrar una desigualdad obtendremos cotas superiores para los conjuntos las cuales nos permitiran decir que los conjuntos son acotados superiormente y asi concluir que los supremos existen.No existe diferencia entre las dos demostraciones, solo que la segunda manera es mas directa que la primera.

(iv) Se asume que cosas del estilo $\forall(a+b) \in A+B$ equivale a $\forall a \in A, b \in B$, $\forall ac \in Ac$ equivale a $\forall a \in A$, $\forall ab \in AB$ equivale a $\forall a \in A, \forall b \in B$ y $\forall\sqrt{a} \in \sqrt{A}$ equivale a $\forall a \in A$ son inmediatas(si no es así, pensarlo un rato).

(v) Para los problemas del tipo probar que algo es supremo o ínfimo la técnica es:
(a) Tener un candidato.
(b) Probar que el candidato es cota superior(para supremos) o cota inferior(para infimos).
(c)Probar que esa cota es la menor cota superior(supremo) o la mayor cota. inferior(ínfimo).

3. Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$ $x \leq y$. Probar que S tiene supremo, que T tiene ínfimo y que $sup(S) \leq inf(T)$.

   Solución:
   Primero Debemos probar que tiene sentido hablar de supremos e infimos. Para esto debemos hacer uso del axioma del supremo que asegura la existencia de supremos y infimos si los conjuntos son acotados superiormente o inferiormente respectivamente y ademas si son no vacios.Para S notemos que si fijamos un $y \in T$ tenemos por enunciado que $\forall x \in S$ $x \leq y$ lo que nos indica que ese y que fijamos es cota superior de S. Asi S es acotado superiormente y por enunciado tenemos que S es no vacio, entonces por el axioma del supremo $sup(S)$ existe. Ahora veamos que existe $inf(T)$.Para T notemos que si fijamos un $x \in S$ tenemos por enunciado que $\forall y \in T$ $x \leq y$ lo que nos indica que ese x que fijamos es cota inferior de T. Asi T esta acotado inferiormente y por enunciado tenemos que T es no vacio, entonces por en por el axioma del supremo $inf(T)$ existe.
   Para probar la desigualdad pedida notemos que si fijamos un $y \in T$ tenemos por enunciado que $\forall x \in S$ $x \leq y$ y como tenemos que ese y es cota superior de S y se cumple que $sup(S) \leq y$ ya que el supremo es la menor cota superior, pero notemos que esto lo tenemos $\forall y \in T$. Asi tenemos que $\forall y \in T$ $sup(S) \leq y$ lo que nos dice que $sup(S)$ es cota inferior de T. Asi tenemos la desigualdad pedida ya que $inf(T)$ es la mayor cota inferior de T por ende como $sup(S)$ es cota inferior se tiene que $sup(S) \leq inf(T)$.

4. Se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente cuando su imagen $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ es un conjunto acotado superiormente. Entonces se escribe $sup\ (f) =\ sup\ \{f(x) : x \in X\}$. Pruebe que:

(a) Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ están acotadas superiormente, entonces lo mismo ocurre con la suma $f+g : X \to \mathbb{R}$ $\big((f+g)(x) = f(x)+g(x)\big)$
(b) $sup\ (f+g) \leq sup\ (f) + sup\ (g)$. Dé un ejemplo donde la desigualdad es estricta.

Solución:

(a) Sabemos $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$y $g(X) = \{g(x) : x \in X\}$ son acotados lo que quiere decir que $\exists M \forall f(x) \in f(X)$ tal que $f(x) \leq M$ Y $\exists M' \forall g(x) \in g(X)$ tal que $g(x) \leq M'$.Notemos que al hablar de $f(x)$ y $g(x)$ como elementos de un conjunto, al estos estar en la imagen de las respectivas funciones se puede cambiar la expresión anterior po $\exists M \forall x \in X$ tal que $f(x) \leq M$ y $\exists M' \forall x \in X$ tal que $g(x) \leq M'$. Asi si sumamos las dos desigualdades ya que se tienen para todo punto en X(es importante que esto ocurra para poder sumar) tenemos que $\forall x \in X$ $f(x)+g(x) \leq M+M'$, y por definición tenemos que $f+g(x) = f(x)+g(x)$. Así tenemos que $\forall x \in X$ $(f+g)(x) \leq M+M'$. Así la función $f+g$ tiene una cota superior por ende esta acotado superiormente.

(b) Tenemos que por la parte (a) los conjuntos imagenes de las funciones estan acotados superiormente y por enunciado tenemos que son no vacios por ende por el axioma del supremo sabemos que existen los supremos de f y g. Asi es por definicion tenemos que $\forall f(x) \in f(X)$ $f(x) \leq sup(f)$, $\forall g(x) \in g(X)$ $g(x) \leq sup(g)$ y notando que como se definen mediante el conjunto imagen loi anterior lo podemos cambiar por $\forall x \in X$ $f(x) \leq sup(f)$, $\forall x \in X$ $g(x) \leq sup(g)$. Así podemos sumar estas dos inecuaciones lo que nos da que $\forall x \in X$ $(f+g)(x) \leq sup(f) + sup(g)$. Como esto se tiene para todo x en X notamos que $sup(f) + sup(g)$ es cota superior del conjunto $f+g(X)$, por esto tenemos que $sup(f+g) \leq sup(f) + sup(g)$ ya que por definición el supremo es la menor cota inferior. Para el ejemplo pensar en $f(x) = x$ y $g(x) = -x$ con $X = [0,1]$. Estas funciones cumplen con el ejemplo pedido y ademas se demuestra que no se tiene la igualdad de supremos de los dos conjuntos que es lo mas importante.

Nota: En general se podria tender a cometer el error de generalizar la igualdad de la suma para dos conjuntos acotados superiormente y no vacios A y B ($sup(A+B) = sup(A) + sup(B)$) pero esto no aplica para el caso de funciones como lo vimos en el ejemplo anterior y es basicamente por que el conjunto $(f+g)(X) \subset f(X) + g(X)$(la diferencia es $f+g(X) = \{f(x)+g(x) \backslash x \in X\}$, conjunto en el que sumo solo las imagenes cuando son evaluadas en el mismo punto y $f(X)+g(X) = \{f(x)+g(y) \backslash x \in X, y \in X\}$ conjunto en el que sumo todas las posibles combinaciones de elementos en la imagen) y es sobre $f(X)+g(X)$ el que aplica la igualdad de los supremos, conjunto que no es el que define el supremo de las funciones ya que pr definición $sup(f+g) = sup(f+g(X))$.

5. *a*) Sea A subconjunto de $\mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente y $c \geq 0$. Pruebe que el conjunto $cA = \{cx : x \in A\}$ es acotado superiormente y que $sup(A) \cdot c = sup(cA)$.
   b) Sean A y B conjuntos de reales no negativos, no vacíos y acotados superiormente. Probar que AB es acotado superiormente y $sup(AB) = sup(A) \cdot sup(B)$.
   Nota: $AB = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$.

Solución:

(a)Primero notemos que el $sup(A)$ existe ya que por enunciado es distinto de vacio y es acotado superiormente. Ahora debemos mostrar que cA tiene supremo pero para esto ocuparemos un metodo mas directo y usaremos la demostración de la igualdad.Para esta debemos seguir la estrategia de probar dos desigualdades por separado.
Primero consideremos el caso en que $c = 0$. Así notemos que $cA = \{0a/a \in A\} = \{0\}$, que claramente tiene supremo ya que es un singleton(no es necesario el axioma del supremo), por ende el $sup(cA) = sup(\{0\}) = 0$, y por otro lado $sup(A)c = sup(A)0 = 0$.Por lo tanto se cumple la igualdad para $c = 0$.
Consideremos ahora el caso en que $c > 0$. Sabemos que $\forall x \in A, x \leq sup(A)$. Multiplicamos a ambos lados de la inecuación por c a ambos(cosiderando que no cambia la desigualdad ya que $c > 0$) tenemos que $\forall x \in A, xc \leq sup(A)c$. Si llamamos $z = xc$ tenemos que $\forall z \in cA, z \leq sup(A)c$. Así hemos probado que $sup(A)c$ es cota superior de cA, lo que nos dice que cA es acotado superiormente y ya que A es distinto de vacio, cA es distinto de vacio(tomar el elemento en A que existe por que es no vacio y multiplicarlo por c, este elemento esta en cA) por lo tanto por axioma del supremo $sup(cA)$ existe, y asi por definición de supremo $sup(cA) \leq sup(A)c$.
Veamos la otra desigualdad. Sabemos que $\forall z \in cA, z \leq sup(cA)$. Sabemos que $z \in cA$, por esto $\exists a \in A$ tal que $z = ac$, asi si remplazamos en la desigualdad anterior tenemos que $\forall a \in A, ac \leq sup(cA)$(notemos que si antes se tenia para todos los z en cA entonces como z=ac tambien se tendra para todo a en A). De esta forma si dividimos la inecuacion anterior por c (que lo podemos hacer ya que estamos asumiendo que $c > 0$) tenemos que $\forall a \in A, a \leq \frac{sup(cA)}{c}$. Así tenemos que $\frac{sup(cA)}{c}$ es cota superior de A por ende por definicion de supremo tenemos que $sup(A) \leq \frac{sup(cA)}{c}$. Así multiplicando por c se tiene la otra desigualdad y se completa la demostración.
(b)Primero notemos que los $sup(A)$ y $sup(B)$ existen ya que por enunciado son distintos de vacio y acotados superiormente. Ahora debemos mostrar que AB tiene supremo, lo cual haremos utilizando la misma estrategia que en la parte anterior. Notemos que $AB = ab/a \in A, b \in B$. Sabemos que

$\forall a \in A, a \leq sup(A)$ y que $\forall b \in B, b \leq sup(B)$.Inecuaciones que equivalen $\forall a \in A, 1 \leq \frac{sup(A)}{a}$ y que $\forall b \in B, 1 \leq \frac{sup(B)}{b}$ lo que se puede hacer ya que $A, B \subset \mathbb{R}^+ \mid \{0\}$.Asi si dos numeros son mayores que 1 su producto tambien lo sera, entonces tenemos que:

$$\forall a \in A, \forall b \in B, 1 \leq \frac{sup(A)sup(B)}{ab}$$
$$\forall a \in A, \forall b \in B, ab \leq sup(A)sup(B)$$

Si llamamos z=ab, tenemos entonces que:

$$\forall z \in AB, z \leq sup(A)sup(B)$$

De lo que se concluye que AB esta acotado superiormente y por enunciado es distinto de vacio. Así por axioma del supremo $sup(AB)$ existe y por la desigualdad anterior y por la definicion de supremo tenemos que:

$$sup(AB) \leq sup(A)sup(B)$$

Demostremos la otra desigualdad. Sabemos que $\forall z \in AB, z \leq sup(AB)$. Como $z \in AB$ lo podemos escribir de la forma $z = ab$. Así tenemos que $\forall a \in A \forall b \in B, ab \leq sup(AB)$. Si pasamos a, para cada uno de los a, dividiendo tenemos que $\forall b \in B, b \leq \frac{sup(AB)}{a}$, desigualdad qeu nos indica que el termino de la derecha es cota superior del conjunto así por la desigualdad anterior y por definición de supremo tenemos que $sup(B) \leq \frac{sup(AB)}{a}$, desigualdad que se cumple $\forall a \in A$.Así si la desigualdad anterior la multiplicamos por a y la dividimos por $sup(B)$(que es mayor que 0 ya que el conjunto B es estrictamente positivo) tenemos que $\forall a \in A, a \leq \frac{sup(AB)}{sup(B)}$. Así por el mismo argumento anterior tenemos que $sup(A) \leq \frac{sup(AB)}{sup(B)}$. Así multiplicando por $sup(B)$ tenemos la desigualdad que nesecitabamos y completamos la demostración.

6. Muestre que $sup(\sqrt{A}) = \sqrt{sup(A)}$ donde $A \subset \mathbb{R}_+$ es no vacío y acotado superiormente y $\sqrt{A} = \{\sqrt{x} : x \in A\}$.
Solución:
Sabemos por enunciado que A cumple los requisitos para poder aplicar el axioma del supremo por ende, el $sup(A)$ existe. La justificación la existencia del $sup(\sqrt{A})$ lo haremos en el proceso de la demostración de la igualdad.
Sabemos que $\forall a \in A \ a \leq sup(a)$ y como son mayores que o iguales a 0 en ambos casos tomamos raiz y tenemos que $\forall a \in A \ \sqrt{a} \leq \sqrt{sup(A)}$. Así renombrando $z = \sqrt{a}$, tenemos que $\forall z \in \sqrt{A} \ z \leq \sqrt{A}$, lo que nos dice que el conjunto $\sqrt{A}$ esta acotado superiormente y es no vacio con lo cual por el axioma del supremo se tiene que el $sup(\sqrt{A})$ existe. De la desigualdad tambien se desprende que $sup(\sqrt{A}) \leq \sqrt{sup(A)}$.
Para probrar la otra desigualdad consideremos que $\forall z \in \sqrt{A} \ z \leq sup(\sqrt{A})$. Pero como $z \in \sqrt{A}$, lo podemos escribir como $z = \sqrt{a}$ con $a \in A$. Así se

tiene que $\forall a \in A, \sqrt{a} \leq sup(\sqrt{A})$, elevamos al cuadrado y la desigualdad no cambia ya que son numero poitivos y tenemos que $\forall a \in A, a \leq (sup(\sqrt{A}))^2$, por lo cual , bajo el mismo argumento de la primera desigualdad se tiene que $sup(A) \leq (sup(\sqrt{A}))^2$, y tomando raiz se tiene la desigualdad buscada con lo cual se concreta la demostración.

7. Probar que $\inf\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\} = 0$
   Solución:
   Debemos probar que 0 es e infimo del conjunto $A = \inf\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$. Para esto primero probaremos que es cota inferior y despues probaremos que es la mayor cota inferior y por ende estos dos hechos implicaran que 0 es el infimo de A.
   Claramente sabemos ya que los naturales son positivos y mayores iguales a uno que el conjunto A posee siempre elementos positivos y por definicion todo numero positivo es mayor que 0 asi $\forall x \in A, x > 0$ lo que implica evidentemente que 0 es cota inferior de A.
   Ahora probemos que es la mayor cota inferior. Hagamoslo por contradiccion. Supongamos que existe $M \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de A y que es mayor que la cota inferior que queremos probar que es infimo, i.e, 0. Asi tenemos que $M > 0$. Para obtener la contradiccion probaremos que M no puede ser cota inferior. Sabemos, por la propiedad de la arquimediana ($\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x > \frac{1}{n}$) que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M > \frac{1}{n_0}$, pero tenemos que por la forma del conjunto A, $\frac{1}{n_0} \in A$. Asi llegamos a una contradiccion ya que habiamos supuesto que M era cota inferior. Por ende 0 es la mayor cota inferior por esto 0 es el infimo del conjunto A.

8. Dado el conjunto $A = \{\frac{3n-1}{2n} \ : n \in \mathbb{N} \setminus\{0\}\}$. Justifique la existencia y encuentre el supremo(demuestre que lo es).
   Solución:
   Notemos que
   $$\frac{3n-1}{2n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n} \to \frac{3}{2}(n \to \infty)$$
   Notemos también que la sucesión $\frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$ es creciente. En efecto, $a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$ y $a_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n+1}$. Entonces $a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \leq 0$ por ende la sucesión es creciente. Este argumento por el momento no es suficiente para probar que $\frac{3}{2}$ es supremo del conjunto anterior, pero nos entrega un candidato seguro a supremo.Probemos ahora que el conjunto tiene supremo y que $\frac{3}{2}$ es el supremo.
   Sabemos que $\frac{1}{2n} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow -\frac{1}{2n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, así sumando $\frac{3}{2}$ a ambos lados, tenemos que $\frac{3}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ por ende el conjunto A es acotado superiormente y es claramente no vacio, así por el axioma del supremo tenemos que el conjunto A tiene supremo y en particular que $\frac{3}{2}$ es cota superior.Probemos que es la menor, proceso que tipicamente se hace por

contradicción.
Supongamos que $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que es cota superior del conjunto A y que es menor que $\frac{3}{2}$. Notemos que de la propiedad de la arquimediana para el numero $2x+3$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-2x+3 > \frac{1}{n_0}$(que tiene sentido ya que $x < \frac{3}{2}$). Despejando el termino x de la inecuación al final tenemos que $x < \frac{3}{2} - \frac{1}{2n_0}$. Es claro que $\frac{3}{2} - \frac{1}{2n_0} \in A$ por ende x no puede ser cota superior del conjunto A. Asi $\frac{3}{2}$ es cota superior y es la menor, por ende $sup(A) = \frac{3}{2}$.