MA1001, Auxiliar 5
Introducción al Cálculo
1 de Septiembre, 2009

Profesor : Raúl Uribe
Auxiliares: Benjamín Obando,Ramiro Villagra

1. Estudie la función definida por $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \mid \sqrt{\mid x \mid} - x \mid$. Para ello:
   a) Encuentre el dominio,ceros.Estudie inyectividad y epiyectividad. Demuestre que $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.
   b) Analice el crecimiento de la función $\sqrt{\mid x \mid} - x$ para $x \geq \frac{1}{4}$, $0 < x < \frac{1}{4}$ y $x \leq 0$
   c) Estudie el crecimiento de $\mid \sqrt{\mid x \mid} - x \mid$ analizando los signos de $\sqrt{\mid x \mid} - x$

2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \mid x \mid - \sqrt{1 - x^2}$
   a) Determine $A = dom(f)$, recorrido y paridad.
   b) Encuentre los ceros y signos de f.
   c) Determine las zonas de creciemiento y de decrecimiento.
   d) Muestre que f no es inyectiva ni sobreyectiva.
   e) Determine el mayor conjunto $B \subset dom(f)$ tal que $f : B \to f(B)$ sea biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$.
   f) Bosqueje $f(x)$ y $\mid f(x) \mid$.

3. Dados α y $\beta \in \mathbb{R}$ considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x + \beta & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
   a) Demuestre que f es epiyectiva ssi $\alpha \leq \beta$
   b) Demuestre que f es inyectiva ssi $\alpha \geq \beta$
   c) ¿Cuál es el conjunto $B = \{(\alpha, \beta) \mid \ f \text{ es biyectiva}\}$?.

4. Demuestre que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene la siguiente desigualdad.
$$\frac{\mid x - y \mid}{1 + \mid x - y \mid} \leq \frac{\mid x - z \mid}{1 + \mid x - z \mid} + \frac{\mid z - y \mid}{1 + \mid z - y \mid}$$
   Indicación: Analice las propiedades de la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

5. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no idénticamente nula, tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$:
   a) Probar que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
   b) Calcule $f(x)$ para $x \in \mathbb{N}$,para $x \in \mathbb{Z}$ y para $x \in \mathbb{Q}$.
   c) Probar que si $x \geq 0$ entonces $f(x) \geq 0$. Deducir que f es estrictamente creciente