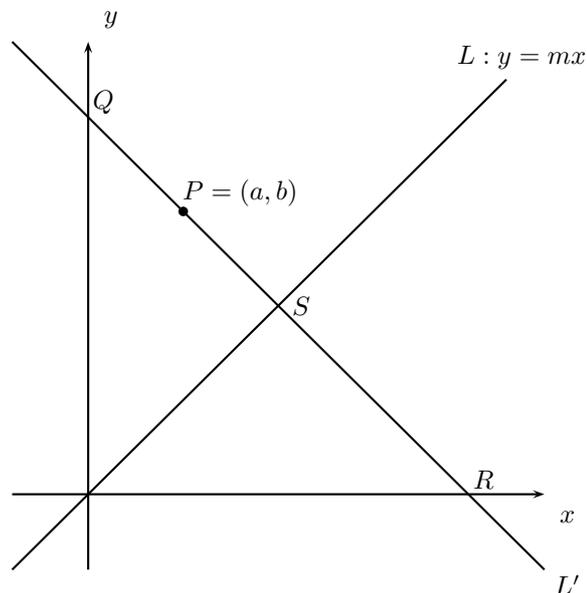


## Semana 3

**P1.** Dado el punto  $P$  de coordenadas  $(a, b)$  y la recta  $L$  de ecuación  $y = mx$ , determinar la ecuación de la recta que pasa por  $P$  y tal que el trazo que queda determinado por la intersección de ella con los ejes, queda dividido por  $L$ .

**Solución**



Sea  $\lambda$  la pendiente de  $L'$ , como  $(a, b) \in L'$ , se tiene que

$$(y - b) = \lambda(x - a)$$

Calculemos ahora las coordenadas de  $Q$  y de  $R$ .

(i)

$$x = 0 \quad y = b - \lambda a \quad Q = (0, b - \lambda a)$$

(ii)

$$y = 0 \quad x = a - \frac{b}{\lambda} \quad R = (a - \frac{b}{\lambda}, 0)$$

Ahora si  $L$  divide a  $QR$ , necesariamente  $S$  será el punto medio de  $QR$ . entonces

$$\frac{Q + R}{2} = S$$

luego

$$S = \frac{1}{2} \left( a - \frac{b}{\lambda}, b - \lambda a \right)$$

además  $S \in L$ , entonces si  $S = (x_S, y_S)$  se tiene que  $y_S = mx_S$ , es decir:

$$b - \lambda a = m \left( a - \frac{b}{\lambda} \right)$$

la cual es una ecuación cuadrática en  $\lambda$  cuyas soluciones son,  $\lambda_1 = -m$  y  $\lambda_2 = \frac{b}{a}$  así finalmente

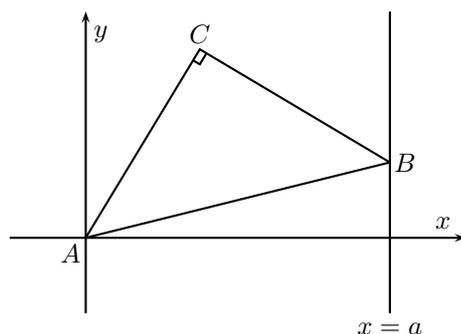
$$L': (y - b) = -m(x - a).$$

ó

$$L': (y - b) = \frac{b}{a}(x - a).$$

- P2.** Un triángulo  $ABC$  isósceles ( $AC = BC$ ) y rectángulo en  $C$ , varía de tal manera que su vértice  $A$  permanece fijo en el origen del sistema de coordenadas y su vértice  $B$  se mueve sobre la recta de ecuación  $x = a$ . Determinar la ecuación del lugar geométrico que recorre el punto  $C$  y reconocer la figura que describe.

**Solución**



Consideremos los puntos  $A = (0, 0)$ ,  $B = (a, y_b)$ ,  $C = (x_c, y_c)$ . Como el triángulo es isósceles se tiene que  $AC = BC$ , luego

$$(x_c - 0)^2 + (y_c - 0)^2 = (x_c - a)^2 + (y_c - y_b)^2. \quad (1)$$

Por otro lado  $AC \perp BC$ , entonces si  $m_{AC}$  y  $m_{BC}$  son las pendientes de las rectas que pasan por  $AC$  y  $BC$  respectivamente, debe tenerse que

$$m_{AC} \cdot m_{BC} = -1.$$

y

$$m_{AC} = \frac{y_c - 0}{x_c - 0} = \frac{y_c}{x_c}$$
$$m_{BC} = \frac{y_c - y_b}{x_c - a}$$

por lo tanto

$$\frac{y_c(y_c - y_b)}{x_c(x_c - a)} = -1 \quad (2)$$

elevando (2) al cuadrado y reemplazando en (1) se obtiene

$$x_c^2 + y_c^2 = (x_c - a)^2 + \frac{x_c^2}{y_c^2}(x_c - a)^2$$
$$y_c^2 = (x_c - a)^2$$

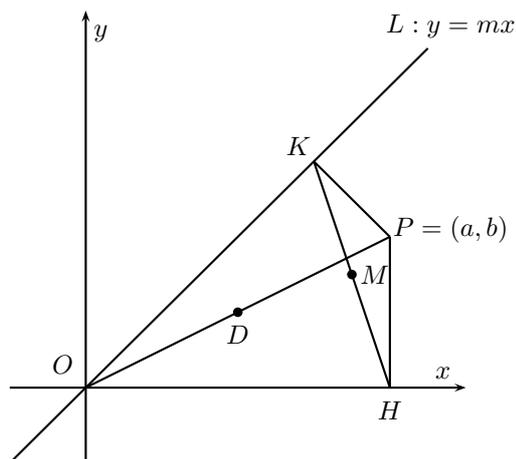
y así

$$y_c = (x_c - a)$$
$$y_c = -(x_c - a)$$

es decir el lugar geométrico que recorre el punto  $C$ , son dos rectas perpendiculares.

- P3.** Dados el punto  $P = (a, b)$  y la recta  $L : y = mx$ , se trazan  $PH$  perpendicular a  $OX$  y  $PK$  perpendicular a  $L$ . Si  $D$  es el punto medio de  $OP$  y  $M$  es el punto medio de  $HK$  Probar que  $DM$  es perpendicular a  $HK$  y  $DK = DH$ .

**Solución**



Sea  $K = (x_0, my_0)$ , por hipótesis tenemos que:

$$P = (a, b) \quad D = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \quad M = \left(\frac{a+x_0}{2}, \frac{mx_0}{2}\right)$$

Probemos que  $DM \perp HK$ :

$$m_{PK} = \frac{mx_0 - b}{x_0 - a}$$

como  $PK \perp L$  se tiene que

$$\frac{m \cdot (mx_0 - b)}{x_0 - a} = -1 \tag{3}$$

por otro lado

$$m_{HK} = \frac{mx_0}{x_0 - a}$$

y

$$m_{PM} = \frac{\frac{mx_0}{2} - \frac{b}{2}}{\frac{a+x_0}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{mx_0 - a}{x_0}$$

entonces

$$\begin{aligned} m_{HK} \cdot m_{DM} &= \frac{mx_0 - b}{x_0} \cdot \frac{mx_0}{x_0 - a} \\ &= \frac{m(mx_0 - b)}{x_0} \\ &= -1 \end{aligned} \tag{3}$$

por lo tanto  $HK \perp DM$ .

Probemos ahora que  $DM = DH$ :

$$\begin{aligned} d_{DH}^2 &= \left(\frac{a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d_{DK}^2 &= \left(\frac{a}{2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - mx_0\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{4} - ax_0 + x_0^2 + \frac{b^2}{4} - bmx_0 + m^2x_0^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + x_0^2 - ax_0 - bmx_0 + m^2x_0^2 \end{aligned}$$

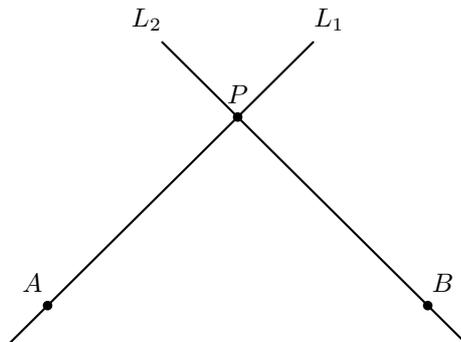
pero por (3)  $m(mx_0 - b) = -x_0 + a$ , entonces

$$\begin{aligned} d_{DK}^2 &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + x_0(x_0 - a) + x_0m(mx_0 - b) \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + x_0 \underbrace{(m(mx_0 - b) + x_0 - a)}_{=0} \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \\ &= d_{DH}^2 \end{aligned}$$

por lo tanto  $DK = DH$ .

**P4.** Dos rectas variables  $L_1$  y  $L_2$  que pasan, respectivamente por dos puntos fijos  $A$  y  $B$  se cortan perpendicularmente en el punto  $P$ . Determinar el lugar geométrico de  $P$ .

**Solución**



Sean  $A = (a, b)$ ,  $B = (c, d)$ , luego

$$L_1 : y - b = m_1(x - a)$$

$$L_2 : y - d = m_2(x - c)$$

(i) si  $x = a$ , entonces  $P = (a, b)$ .

(ii) si  $x = c$ , entonces  $P = (c, d)$ .

(iii) si  $x \neq a$  y  $x \neq c$ ;

$$m_1 = \frac{y - b}{x - a}$$

$$m_2 = \frac{y - d}{x - c}$$

como  $L_1 \perp L_2$  se cumple que  $m_1 \cdot m_2 = -1$ , es decir

$$\frac{(y - b)(y - d)}{(x - a)(x - c)} = -1 \tag{4}$$

desarrollando esta ecuación se obtiene

$$\left(y - \frac{(b+d)}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{(a+c)}{2}\right)^2 = \frac{(b-d)^2}{4} + \frac{(a-c)^2}{4}.$$

que corresponde a una circunferencia de centro

$$C = \left(\frac{b+d}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$$

y radio

$$r = \sqrt{\frac{(b-d)^2}{4} + \frac{(a-c)^2}{4}}$$

**Observación:** Notar que  $C$  es el punto medio entre  $A$  y  $B$ , y  $r = d_{AB}$ .