Auxiliar n 14

Profesor: Raul Uribe
Auxiliar: Ramiro Villagra

P1. Sea f derivable en x_0, calculular:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0+\beta h)}{h}$$

donde $\alpha, \beta \in \Re$

Solucion:
Usando el viejo truco "Nikita-Nipone"

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0+\beta h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0+\beta h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+\beta h)}{h} \\
&= \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} + \beta \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+\beta h)}{\beta h} \\
&= \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} - \beta \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\beta h) - f(x_0)}{\beta h}
\end{aligned}$$

Sea $t = \alpha h$ y $s = \beta h$, notemos que $\lim_{h\to 0} \alpha h \iff \lim_{t\to 0} t$, se tiene lo mismo para s. Por lo que podemos reescribir los limites anteriores como:

$$\alpha \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} + \beta \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+s)}{s}$$

Notemos que ambos limites existen porque f es diferenciable en x_0, por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0+\beta h)}{h} = \alpha f'(x_0) - \beta f'(x_0)$$

P2. Sean f_i funciones de $\Re \to \Re$ (derivables), donde $i = 1, .., n$. Sea $G_n = f_1(f_2(...(f_n(x))...))$. Demuestre que:

$$G_n'(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i'(f_{i+1}(f_{i+2}(...(f_n(x))...)))$$

Solucion:

Lo demostraremos por induccion:

1) Caso base $n = 1 \Rightarrow_1 = f_1(x)$ luego: $G_1' = f_1' = \prod_{i=1}^{1} f_i'(x)$

2)Suponemos que se tiene el resultado para algun, probamos para n+1 (recordar que los parenteis denotan composicion). Notemos que utilizando regla de la cadena:

$$G_{n+1}(x) = G_n(f_{n+1}(x))$$

Luego

$$\begin{aligned}
G'_{n+1}(x) &= (G_n(f_{n+1}(x)))' \\
&= G'_n(f_{n+1}(x)) \cdot (f'_{n+1}(x)) \\
&= \prod_{i=1}^{n} f'_i(f_{i+1}(f_{i+2}(...(f_n(x))...)))(f_{n+1}(x)) \cdot (f'_{n+1}(x)) \\
&= \prod_{i=1}^{n} f'_i(f_{i+1}(f_{i+2}(...(f_n(f_{n+1}(x)))...))) \cdot (f'_{n+1}(x)) \\
&= \prod_{i=1}^{n+1} f'_i(f_{i+1}(f_{i+2}(...(f_n(f_{n+1}(x)))...)))
\end{aligned}$$

Queda demostrado.

P3. Sea $f : \Re \to \Re$ una funcion tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq a(x-y)^2 \forall x, y \in \Re$$

con $a \geq 0$. Pruebe que $f' : \Re \to \Re$ exite y $f'(x) = 0$ para todo $x \in \Re$

Solucion

Notar primero que la propiedad se tiene para todo x, y asi que tenemos derecho a tomar los que nos convengan, en particular parece util elegir $x = y + h$, luego:

$$|f(y+h) - f(y)| \leq a(y+h-y)^2$$

Reescribiendo el modulo

$$-ah^2 \leq f(y+h) - f(y) \leq ah^2$$

$$-ah \leq \frac{f(y+h) - f(y)}{h} \leq ah$$

Tomando limite a ambos lados

$$\lim_{h\to 0} -ah \leq \lim_{h\to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} \leq \lim_{h\to 0} ah$$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = 0 \Longleftrightarrow f'(y) = 0$$

Con esto queda deostrada la existencia del limite (derivada de f) y su valor para todo $y \in \Re$.

P4. Sea $f : \Re \to \Re$ derivable tal que $f' = af(x) \forall x \in \Re$, con a constante. Demostrar que $f(x) = f(0)e^{ax}$. *Indicacion:* Considere $g(x) = e^{-ax} f(x)$

Solucion

Usando la indicacion, calculamos $g'(x)$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -ae^{-ax}f(x) + e^{-ax}f'(x) \\
&= -ae^{-ax}f(x) + ae^{-ax}f(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Esto significa que $g(x) = cte = c$, despejando $f(x)$ se tiene que:

$$ce^{ax} = f(x)$$

Evaluando la expresion en $x = 0$:

$$ce^{a\cdot 0} = f(0) \Rightarrow c = f(0)$$

Volviendo a la expresion anterior:

$$f(0)\cdot e^{ax} = f(x)$$

Con lo que se concluye la demostracion.

P5. Determine un punto en que la curva $x^2 + y^2 = e^{2kArctg\frac{y}{x}}$; k =constante, corta al semieje positivo OX y escriba las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en dicho punto.

Solucion

Notemos que el corte con el eje OX se produce cuando $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, como buscamos el corte con el semi-eje positivo, tomamos $x = 1$.

Ahora necesitamos calcular la derivada en el punto (1,0), utilizando derivacion implicita tenemos que derivando a ambos lados:

$$2x + 2y = e^{2kArctg\frac{y}{x}}\frac{2k}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{y'x+y}{x^2}$$

$$2x + 2y = e^{2kArctg\frac{y}{x}}\frac{2kx^2}{x^2+y^2}\frac{y'x+y}{x^2}$$

$$2x + 2y = e^{2kArctg\frac{y}{x}}\frac{2k}{x^2+y^2}(y'x+y)$$

Pero del enunciado sabemos que $x^2 + y^2 = e^{2kArctg\frac{y}{x}}$, luego:

$$2x + 2y = 2k(y'x + y)$$

Evaluando en (1,0) se tiene que :

$$y'(1) = \frac{1}{k}$$

Recordemos que $y'(1)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto (1,0), luego su ecuacion queda:

$$y - 0 = y'(1)(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{k}(x-1)$$

La recta normal es perpendicular a la tangente por lo tanto su ecuacion queda:

$$y = -k(x-1)$$

P6. Considere la funcion dada por la regla

$$f(x) = \begin{matrix} x^n \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{matrix}$$

a) Pruebe que si $n > 1$ entonces f es derivable en $x_0 = 0$; pero para $n = 1$ no.

b) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$ y encuentre para que valores de n se cumple $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$

Solucion a)

Calculemos primero $f'(0)$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)+f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^n \sin(\frac{1}{h}) + 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h^{n-1} \sin(\frac{1}{h}) \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $n > 1 \Rightarrow f'(0) = 0$ y si $n = 1 \Rightarrow f'(0)$ no existe.

b)
Calculemos ahora $f'(0) \forall x \neq 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} \sin(\frac{1}{x}) + x^n \cos(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2} \\ &= nx^{n-1} \sin(\frac{1}{x}) - x^{n-2} \cos(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

Tomando $x \to 0$,

$$n \geq 2 \Rightarrow \lim_{h\to 0} nx^{n-1} \sin(\frac{1}{x}) - x^{n-2} \cos(\frac{1}{x}) = 0$$

$$n < 2 \Rightarrow \lim_{h\to 0} nx^{n-1} \sin(\frac{1}{x}) - x^{n-2} \cos(\frac{1}{x}) = \infty$$

P7. En un triangulo ABC se cumple: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$. Si consideramos que b; c son constantes y α variable, demostrar que $\frac{da}{d\alpha} = h_a$, en que h_a es la altura del triangulo correspondiente a la base a. Interpretar el significado geometrico de este resultado.

Solucion

Calculemos

$$\frac{da}{d\alpha} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)}} 2bc\sin(\alpha) = \frac{bc\sin(\alpha)}{a}$$

Ademas utilizando el teorema del seno tenemos que:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} \Longrightarrow b\frac{\sin(\alpha)}{a} = \sin(\beta)$$

Reemplazando en lo anterior tenemos:

$$\frac{da}{d\alpha} = c\sin(\beta) = h_a$$

Con lo que se tiene lo pedido.

La interpretacion geometrica de este resultado es que la tasa con que varia el lado a al variar el angulo opuesto α es proporcional a la altura del triangulo.