

MA1001, Auxiliar 9
Introducción al Cálculo
14 de Octubre, 2009
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliares: Benjamín Obando, Ramiro Villagra

1. Usando la definición de límite de una sucesión demostrar que

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1-n} = -3$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} = \frac{2}{3}$
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos(n\pi)}{n^2+1} = 0$.

2. Sea $a_n \rightarrow a$. Pruebe por definición que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = a$$

3. Sea $u_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} = \frac{1}{2}$.

4. Si (a_n) es una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = a$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

5. Estudiar la sucesión $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

6. Probar que si (a_n) es una sucesión de términos positivos convergente a $l > 0$, entonces,

- a) Si se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$
- b) Usando lo anterior concluya los valores de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

7. Considere la sucesión (s_n) definida por la recurrencia

$$s_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3 + s_n^2}{a + 1}}$$

con $a > 0$ y $s_1 \geq a$.

- a) Demuestre usando inducción que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n \geq a$.
- b) Muestre que (s_n) es decreciente y concluya que su límite existe.
- c) Calcule este límite.