

MA1001, Auxiliar 7
Introducción al Cálculo
23 de Septiembre, 2009
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliares: Benjamín Obando, Ramiro Villagra

1. Grafique la función:

$$f(x) = |1 - 2 \cos(x + \pi)| - 1$$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a)

$$\sqrt{2} \sin(x) = 1 - \sqrt{2} \cos x$$

b)

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 1 + \sin(2x)$$

3. Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$ $x \leq y$. Probar que S tiene supremo, que T tiene ínfimo y que $\sup(S) \leq \inf(T)$.

4. Se dice que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ está acotada superiormente cuando su imagen $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ es un conjunto acotado superiormente. Entonces se escribe $\sup(f) = \sup\{f(x) : x \in X\}$. Pruebe que:

- (a) Si $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ están acotadas superiormente, entonces lo mismo ocurre con la suma $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($(f + g)(x) = f(x) + g(x)$)
(b) $\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$. Dé un ejemplo donde la desigualdad es estricta.

5. a) Sea A subconjunto de $\mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente y $c \geq 0$. Pruebe que el conjunto $cA = \{cx : x \in A\}$ es acotado superiormente y que $\sup(A) \cdot c = \sup(cA)$.

- b) Sean A y B conjuntos de reales no negativos, no vacíos y acotados superiormente. Probar que AB es acotado superiormente y $\sup(AB) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

Nota: $AB = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$.

6. Muestre que $\sup(\sqrt{A}) = \sqrt{\sup(A)}$ donde $A \subset \mathbb{R}_+$ es no vacío y acotado superiormente y $\sqrt{A} = \{\sqrt{x} : x \in A\}$.

7. Probar que $\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$