Auxiliar
Intr. al Cálculo

Prof: Raúl Uribe
Aux: Ramiro Villagra

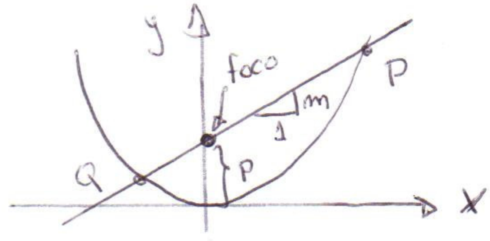
P1 Parábolas.

Considere una parábola y recta L que pasa por el foco de ésta. Escoja la posición de la parábola que más le convenga, por ejemplo con directriz vertical u horizontal, con el vértice en el origen o bien el foco en el origen. Suponga es no vertical de pendiente m y que no es paralela al eje de simetría de la parábola. Denotemos por $p>0$ la distancia entre el foco y el vértice de la parábola.

i) Escriba en términos de p y m una ecuación para la parábola y una para L.

Sol Consideremos una parábola con eje de simetría vertical, vértice en el origen y directriz $y=-p$.

i) Ecuación parábola: $y = \frac{1}{4p}x^2 \quad (1)$



Ecuación de la recta

$y = mx + p. \quad (2)$

ii) Calcule los puntos de intersección P y Q de L con la parábola, en función de p y m.

Igualando las ecuaciones $(1)=(2)$

$$\frac{1}{4p}x^2 = mx + p$$

$$\frac{x^2}{4p} - mx - p = 0 \Rightarrow x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4\frac{1}{4p}\cdot p}}{2\cdot 1/4p}$$

$$\Rightarrow x = 2pm \pm 2p\sqrt{m^2+1}$$

Reemplazando x en (2)

$y = m\left(2pm \pm 2p\sqrt{m^2+1}\right) + p$

$y = 2pm^2 + p \pm 2pm\sqrt{m^2+1}$

Luego las coordenadas de P y Q, son.

$P(X_+, Y_+) \qquad Q(X_-, Y_-)$

$P\left(2pm + 2p\sqrt{m^2+1},\ 2pm^2 + p + 2pm\sqrt{m^2+1}\right)$

$Q\left(2pm - 2p\sqrt{m^2+1},\ 2pm^2 + p - 2pm\sqrt{m^2+1}\right)$

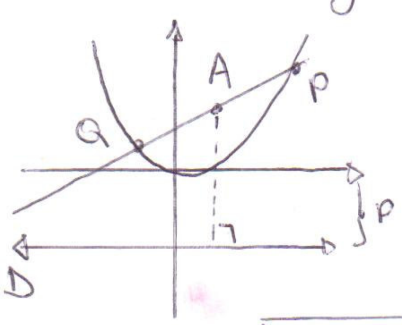
iii) Encuentre el punto medio A del segmento $\overline{PQ}$

+ El punto medio del segmento recto $\overline{PQ}$ se calcula como:

$A = \left(\frac{x_p + x_q}{2}, \frac{y_p + y_q}{2}\right) = \left(\frac{4pm}{2}, \frac{4pm^2 + 2p}{2}\right)$

$\boxed{A = \left(2pm, 2pm^2 + p\right)}$

iv) Pruebe que dist(A, P) = dist(A, D), donde D es la recta directriz de la parábola.



Es claro que:

$Dist(A,D) = p + y_A = p + 2pm^2 + p$

$Dist(A,D) = 2p(1 + m^2)$

$Dist(A,P) = \sqrt{(x_p - x_A)^2 + (y_p - y_A)^2}$

$= \sqrt{\left(\cancel{2pm} + 2p\sqrt{m^2+1} - \cancel{2pm}\right)^2 + \left(\cancel{2pm^2} + \cancel{p} + 2pm\sqrt{m^2+1} - \cancel{2pm^2} - \cancel{p}\right)^2}$

$= \sqrt{4p^2(m^2+1) + 4p^2m^2(m^2+1)}$

$= \sqrt{4p^2(m^2+1)(1+m^2)} = 2p(m^2+1)$

v) Pruebe que las rectas tangentes a la parábola en los puntos P y Q son perpendiculares.

La fórmula para la recta tangente a la parábola de ecuación $y = \frac{1}{4p}x^2$ en un punto (x_0, y_0) viene dada por

$$y + y_0 = \frac{1}{2p} x x_0$$

Luego la tangente en P es $y + y_+ = \frac{1}{2p} x_+ \cdot x$

su pendiente es $m' = \frac{x_+}{2p} = \frac{2pm + 2p\sqrt{m^2+1}}{2p} = m + \sqrt{m^2+1}$

La tangente a Q es $y + y_- = \frac{1}{2p} x \cdot x_-$, la pendiente es

$$m'' = \frac{x_-}{2p} = \frac{2pm - 2p\sqrt{m^2+1}}{2p} = m - \sqrt{m^2+1}$$

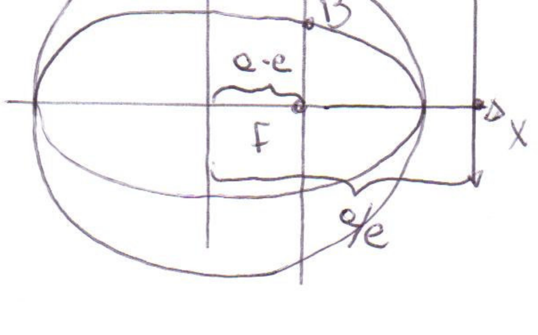
Vemos que $m' \cdot m'' = (m + \sqrt{m^2+1})(m - \sqrt{m^2+1}) = m^2 - m^2 - 1 = -1$

$\Rightarrow$ Son perpendiculares.

P2) i) Considera la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. La perpendicular al eje mayor de la elipse por su foco F corta a la circunferencia en A y a la elipse en B.

Demuestre que las tangentes trazadas por A y B a cada curva, respectivamente se cortan en el pie de la directriz de la elipse (Punto de intersección de la directriz con el eje OX)

Sol)



Primero debemos encontrar los puntos A y B, notar que el foco tiene ordenada $a \cdot e$, y la directriz es: $x = \frac{a}{e}$, donde e es la excentricidad dada por $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$.

Para encontrar A evaluamos la ec. de la circunferencia en $x = a \cdot e$ y para encontrar B en la ec. de la elipse

En B | $\frac{(a \cdot e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \quad y = \sqrt{(1-e^2)b^2}$ Consideramos solo la solución positiva.

En A | $(ae)^2 + y^2 = a^2$

$y = a\sqrt{(1-e^2)}$

Luego $A = (ae, a\sqrt{(1-e^2)})$ $B = (a \cdot e, b\sqrt{1-e^2})$

La ec de la tangente a la circunferencia en (x_0, y_0) es $x \cdot x_0 + y \cdot y_0 = a^2$, luego la tangente en A es

$x \cdot \cancel{a} e + y \cdot \cancel{a}\sqrt{(1-e^2)} = a^{\cancel{2}}$

$$\boxed{y = \frac{-e \cdot x}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}}$$

Intersectando la recta con OX $(y=0)$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{e}} \leftarrow$ pie de la directriz

La ec de la tangente a la elipse en (x_0, y_0) es.

$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$, entonces la tangente en B es.

$\frac{\cancel{a} e \cdot x}{a^{\cancel{2}}} + \frac{\cancel{b}\sqrt{1-e^2} \cdot y}{b^{\cancel{2}}} = 1 \Rightarrow y = \left(1 - \frac{ex}{a}\right)\frac{b}{\sqrt{1-e^2}}$

Intersectando la recta con OX $(y=0)$

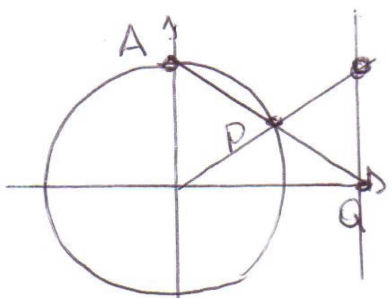
$\Rightarrow 1 - \frac{ex}{a} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{e}}$

P3 Considere la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ y su punto superior $A(0,r)$. Por un punto $P(x_0,y_0)$ cualquiera de la circunferencia se traza la recta AP, la cual corta el eje OX en un punto Q.

i) Demuestre que el lugar geométrico de la intersección de la recta OP con la vertical por Q es una parábola.

ii) Determine el vértice, foco y directriz de la parábola LE.

Sol



Primero calculamos Q, buscamos la recta que pasa por A y P.

$$m_{AP} = \frac{y_0 - r}{x_0}$$

$$\Rightarrow L_{AP}: \boxed{y - r = \frac{y_0 - r}{x_0} \cdot x}$$

$\Rightarrow Q$ se calcula como la intersección de Ox con la recta, es decir evaluamos en $y=0$

$$\Rightarrow 0 - r = \frac{y_0 - r}{x_0} \cdot x \quad \Rightarrow \boxed{x_Q = \frac{-r x_0}{y_0 - r}}$$

Luego la recta vertical por Q es $\boxed{x = \frac{-r x_0}{y_0 - r}} \Rightarrow (y_0 - r)x = -r x_0$ (1)

La recta OP tiene pendiente $m_{OP} = \frac{y_0}{x_0}$ y ecuación

$$\boxed{y = \frac{y_0}{x_0} \cdot x} \Rightarrow y \cdot x_0 = y_0 \cdot x \quad (2)$$

$$y_0 x = x_0 \cdot y$$

Dividiendo (2) por (1)

$$\frac{y_0}{y_0 - r} = \frac{y}{-r} \Rightarrow y_0 r = y r - y_0 y$$

$$\boxed{y_0 = \frac{y \cdot r}{(r+y)}}$$

Reemplazando en (1) $\left(\frac{y \cdot r}{r+y} - r\right) x = -r \cdot x_0$

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = \left(1 - \frac{y}{r+y}\right) \cdot x}$$

Ahora que tenemos x_0, y_0 en función de x, y (Punto del 2.6) notemos que $x_0, y_0 \in$ a la $\odot$, luego cumplen que:

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

$$\left(1 - \frac{y}{r+y}\right)^2 \cdot x^2 + \left(\frac{yr}{r+y}\right)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{r}{r+y}\right)^2 \cdot x^2 + \left(\frac{r}{r+y}\right)^2 \cdot y^2 = r^2$$

$$\left(\frac{\cancel{r}}{r+y}\right)^2 (x^2+y^2) = \cancel{r^2} \Rightarrow x^2+y^2 = (r+y)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \cancel{y^2} = r^2 + 2ry + \cancel{y^2}$$

$\Rightarrow$ Luego $\boxed{y = \frac{x^2 - r^2}{2r} = \frac{x^2}{2r} - \frac{r}{2}}$

De la ecuación general $y = ax^2 + bx + c$, sabemos que el vértice es: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \Rightarrow V = \left(0, -\frac{r}{2}\right)$

Además el foco es $Y_f = Y_v + p$ ¿P?

Sabemos que $4p$ es el término que divide a x^2

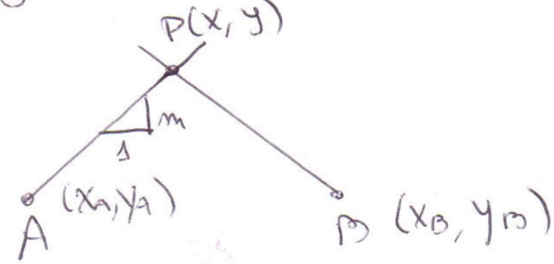
$\Rightarrow 4p = 2r \Rightarrow \boxed{\frac{r}{2} = p}$

$\Rightarrow Y_f = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2} = 0 \Rightarrow F = (0,0)$

Directriz $D = (Y_v) \cdot 2 = -r \Rightarrow \boxed{y = -r}$

[P4] Dos rectas variables L_1 y L_2 que pasan por dos puntos A y B se cortan perpendicularmente en el punto P. Determinar el lugar geométrico de P.

Sol)



Sea m la pendiente de L_A

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

Sea m' la pendiente de L_B

$$m' = \frac{y - y_B}{x - x_B}$$

Si son perpendiculares deben cumplir ($x \neq x_A$, $x \neq x_B$: analizar por separado)

$$m \cdot m' = -1 \Rightarrow \frac{(y - y_A)}{(x - x_A)} \cdot \frac{(y - y_B)}{(x - x_B)} = -1$$

$$\Rightarrow (y - y_A)(y - y_B) = (x_A - x)(x - x_B)$$

$$y^2 - y \cdot y_A - y \cdot y_B + y_A \cdot y_B = x_A \cdot x - x_A x_B - x^2 + x x_B$$

$$y^2 - y(y_A + y_B) + y_A \cdot y_B = x(x_A + x_B) - x^2 - x_A \cdot x_B$$

Completando cuadrados

$$\Rightarrow y^2 - y(y_A + y_B) + \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + y_A \cdot y_B$$

$$+ x^2 - x(x_A + x_B) + \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + x_A \cdot x_B = 0$$

$$\Rightarrow \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 = \frac{(x_A + x_B)^2}{4} + \frac{(y_A + y_B)^2}{4} - x_A x_B - y_A y_B$$

$$\Rightarrow \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 = \frac{(x_A - x_B)^2}{4} + \frac{(y_A - y_B)^2}{4}$$

Circunferencia de centro $\left(\frac{A + B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$