

MA1001, Auxiliar 1
Introducción al Cálculo
5 de Agosto, 2009
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliares: Benjamín Obando, Ramiro Villagra

1. Axiomas de cuerpo

Demuestre las siguientes propiedades:

(a) Para todo a en los reales sin el 0:

$$(a^2)^{-1} = (a^{-1})^2$$

Solución:

Para realizar esta demostración debemos notar que la pregunta se reduce a probar que a^2 es el inverso multiplicativo de $(a^{-1})^2$. Así debemos probar que $a^2(a^{-1})^2 = 1$. Lo cual se demuestra con los axiomas de los reales. Para esto debemos tener en consideración que $a^2 = aa$ y que $(a^{-1})^2 = a^{-1}a^{-1}$ por definición de un número al cuadrado. Así:

$$\begin{aligned} a^2(a^{-1})^2 &= aa(a^{-1}a^{-1}) = a(aa^{-1})a^{-1} / \text{Asociatividad} \\ &= a1a^{-1} / \text{Opuestos} \\ &= aa^{-1} / \text{Neutro} \\ &= 1 / \text{Opuestos} \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

(b) Para todo a en los reales y b en los reales sin el 0:

$$(-a)b^{-1} = -(ab^{-1})$$

(c) Considere a y c en los reales y b y d en los reales sin el 0. Demuestre la implicancia :

$$a(b+d) = b(a+c) \Rightarrow ab^{-1} = cd^{-1}$$

(d) Para a y b en los reales sin el 0. Si $(a+b) = 1$. Entonces se tiene que:

$$(ab)^{-1} = (a^{-1} + b^{-1})$$

Solución:

Para realizar esta demostración nuevamente debemos notar que la pregunta se reduce a demostrar que ab es el inverso multiplicativo de $a^{-1} + b^{-1}$. Para esto deberemos en algún momento de la demostración usar como hipótesis que $a + b = 1$. Es importante pensar que habitualmente dada la forma de la pregunta se podría pensar que de la expresión $a + b = 1$ podríamos transformar esa expresión multiplicando a ambos lados por algo para llegar a demostrar lo que queremos, pero eso no es un buen camino si es que no se sabe por lo que hay que multiplicar

$(a^{-1}b^{-1})$. Por esto realizamos la demostración más ortodoxa y recomendable (por lo menos de mi parte). Así tenemos que demostrar que $ab(a^{-1} + b^{-1}) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 ab(a^{-1} + b^{-1}) &= a(b(a^{-1} + b^{-1}))/\text{Asociatividad} \\
 &= a(ba^{-1} + bb^{-1})/\text{Distributividad} \\
 &= a(ba^{-1} + 1)/\text{Opuestos} \\
 &= a(a^{-1}b + 1)/\text{Conmutatividad} \\
 &= aa^{-1}b + a1/\text{Distributividad} \\
 &= 1b + a1/\text{Opuestos} \\
 &= b + a/\text{Neutro} \\
 &= a + b/\text{Conmutatividad} \\
 &= 1/\text{Hipotesis}
 \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Demostración Alternativa:

Sabemos que $a + b = 1$. Multiplicamos a ambos lados por $a^{-1}b^{-1}$. Así

$$\begin{aligned}
 (a + b)a^{-1}b^{-1} &= 1a^{-1}b^{-1} \\
 aa^{-1}b^{-1} + ba^{-1}b^{-1} &= 1a^{-1}b^{-1}/\text{Distributividad} \\
 aa^{-1}b^{-1} + a^{-1}bb^{-1} &= 1a^{-1}b^{-1}/\text{Conmutatividad} \\
 1b^{-1} + 1a^{-1} &= 1a^{-1}b^{-1}/\text{Opuestos} \\
 b^{-1} + a^{-1} &= a^{-1}b^{-1}/\text{Neutro} \\
 a^{-1} + b^{-1} &= a^{-1}b^{-1}/\text{Conmutatividad} \\
 a^{-1} + b^{-1} &= (ab)^{-1}/\text{Definición}
 \end{aligned}$$

2. Axiomas de orden. Demostraciones con desigualdades.

Demuestre las siguientes proposiciones:

(a) Demuestre la siguiente desigualdad para todo x e y en los reales:

$$x^2 + xy + y^2 > 0$$

(b) Pruebe que si $x^3 + x = y^3 + y \Rightarrow x = y$

(c) Pruebe que si $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1$. Entonces $ac + bd \leq 1$

Solución:

Notemos primero que si a y b son números reales se tiene que:

$$\begin{aligned}
 (a - b)^2 &\geq 0 \\
 a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\
 a^2 + b^2 &\geq 2ab
 \end{aligned}$$

Nota: esta desigualdad es básica. Es importante saber cómo se demuestra y tenerla siempre presente para resolver este tipo de problemas.

Para probar la desigualdad que se pide en el problema Usaremos la desigualdad anterior para a y c para obtener una inequación y después usaremos la misma

desigualdad con b y d para otra inecuación. Después sumaremos las dos ecuaciones obtenidas y usaremos la información que tenemos como hipótesis que es que $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1$ y así concluiremos la desigualdad pedida. Así tenemos que:

$$a^2 + c^2 \geq 2ac \dots (1)$$

$$b^2 + d^2 \geq 2bd \dots (2)$$

Sumando (1) y (2):

$$a^2 + c^2 + b^2 + d^2 \geq 2ac + 2bd$$

Utilizando la hipótesis $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1$ tenemos que :

$$1 + 1 \geq 2ac + 2bd$$

$$2 \geq 2ac + 2bd$$

Dividimos por 2:

$$1 \geq ac + bd$$

Que es lo que queríamos demostrar.

(d) Si $0 < a < 1$ y $b > 1$. Demuestre que:

$$ab + 1 < a + b$$

Solución: Sabemos que si $x - y < 0$ si y solo si $x < y$. Así intentaremos demostrar que $ab + 1 - (a + b) < 0$. Entonces:

$$ab + 1 - (a + b) = ab + 1 - a - b = ab - a + 1 - b = a(b - 1) - (b - 1) = (b - 1)(a - 1)$$

Notando que $b > 1$ el término $b - 1$ es positivo. Análogamente como $0 < a < 1$ el término $a - 1$ es negativo por ende como la multiplicación de un número positivo por un número negativo es un número negativo tenemos que:

$$ab + 1 - (a + b) = (b - 1)(a - 1) < 0$$

Que es lo que queríamos demostrar. (Ppto. justificar con los axiomas correspondientes)

3. Inecuaciones.

Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

Importante: Conjunto solución de inecuaciones cuadráticas. Supongamos que queremos resolver la inecuación $ax^2 + bx + c \leq 0$. Para esto debemos analizar $ax^2 + bx + c$ cuando es negativa. Para esto supongamos que podemos escribir $ax^2 + bx + c = d(x - r_1)(x - r_2)$ con $r_1 < r_2$. Si reemplazamos en la inecuación tenemos que $d(x - r_1)(x - r_2) \leq 0$. Asumamos ahora para poder simplificar que $d > 0$ (es importante notar que si $d < 0$ cambia la inecuación si es que simplificamos). Así el problema se reduce a resolver $(x - r_1)(x - r_2) \leq 0$. Para que esto ocurra debemos notar que uno de los términos multiplicación debe ser negativo y el otro positivo. Así tenemos dos opciones que $(x - r_1)$ negativo y que $(x - r_2)$ sea positivo o bien que $(x - r_2)$ negativo y que $(x - r_1)$ sea positivo.

(1er caso) $(x - r_1) \geq 0$ y $(x - r_2) \leq 0 \Rightarrow x \geq r_1$ y $x \leq r_2 \Rightarrow r_1 \leq x \leq r_2$.

(2do caso) $(x - r_2) \geq 0$ y $(x - r_1) \leq 0 \Rightarrow x \geq r_2$ y $x \leq r_1 \Rightarrow x \in \phi$ (ya que $r_1 < r_2$).

Así $x \in [r_1, r_2]$.

Notemos que utilizamos los supuestos que podíamos $ax^2 + bx + c = d(x - r_1)(x - r_2)$ con $r_1 < r_2$. Esto no es posible siempre ya que puede ocurrir que r_1 y r_2 sean complejos conjugados. En ese caso ocurre que $ax^2 + bx + c$ es siempre positivo o es siempre negativo. (ejemplo problema (a)). En el caso en que $r_1 = r_2$ notemos que la ecuación queda $ax^2 + bx + c = d(x - r_1)^2$ la cual es siempre positiva o es siempre negativa dependiendo del valor de d .

Queda propuesto realizar el caso en que $ax^2 + bx + c \geq 0$ lo que bajo los mismo supuestos anteriores, es decir, que $ax^2 + bx + c = d(x - r_1)(x - r_2)$ con $r_1 < r_2$ y $d > 0$ concluir que $x \in (-\infty, r_1] \cup [r_2, +\infty)$.

En resumen, si es que llegamos al caso en que necesitamos resolver (con $r_1 < r_2$):

$$1) (x - r_1)(x - r_2) \leq 0 \Rightarrow x \in [r_1, r_2]$$

$$2) (x - r_1)(x - r_2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, r_1] \cup [r_2, +\infty)$$

$$3) (x - r_1)(x - r_2) < 0 \Rightarrow x \in (r_1, r_2)$$

$$4) (x - r_1)(x - r_2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, r_1) \cup (r_2, +\infty)$$

Es muy importante tener en cuenta este tipo de inecuaciones ya que pueden simplificar mucho el desarrollo de cualquier problema de encontrar el conjunto solución de una inecuación.

(a)

$$\frac{3 - 2x}{x^2 - |2x - 3|} \leq 0$$

(b)

$$7 + |1 + x^2| \leq |x^2 + 3x| + |x + 3| + x^2$$

Solución: Notemos que $1 + x^2 > 0$, por ende $|1 + x^2| = 1 + x^2$. Así la inecuación queda:

$$7 + 1 + x^2 \leq |x^2 + 3x| + |x + 3| + x^2$$

$$8 \leq |x^2 + 3x| + |x + 3|$$

Sabemos que $|ab| = |a| |b|$. Por ende $|x^2 + 3x| = |x| |x + 3|$. Así la inecuación queda:

$$8 \leq |x| |x + 3| + |x + 3|$$

$$8 \leq (|x + 3|)(|x| + 1)$$

Notemos que esta inecuación solo tiene sentido cuando $x \geq 0$ ya que, en caso contrario, el término $|x| + 1 = 0$ lo que reemplazando en la ecuación, nos queda que $8 \leq 0$, lo que no puede ser. Por ende solo consideramos el caso en que $x \geq 0$. Así la inecuación nos queda:

$$8 \leq (x + 3)2x$$

$$0 \leq 2x^2 + 6x - 8$$

$$0 \leq (2x - 2)(x + 4)$$

Así como las raíces de $(2x - 2)(x + 4)$ son -4 y 1 , la solución de la inecuación es $x \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$, Pero ya que $x \geq 0$, Concluimos que la solución de la inecuación inicial es $x \in [1, +\infty)$

(c)

$$|x^2 - x - 2| \leq \frac{2}{3}x + 2$$