P4 $\quad G_p(s) = \frac{k_p}{\tau_p s+1} e^{-t_d s} \qquad G_m = G_f = 1$

a) Diseñando por IMC

aproximamos $e^{-t_d s} \underset{\text{Padé}}{=} \frac{1 - t_d/2\, s}{1 + t_d/2\, s}$ 0,2

$\Rightarrow \tilde{G}(s) = \frac{k_p}{\tau_p s+1} \cdot \frac{1 - t_d/2\, s}{1 + t_d/2\, s} \Rightarrow \tilde{G}_+ = 1 - t_d/2\, s \qquad$ 0,20

$\tilde{G}_- = \frac{k_p}{(\tau_p s+1)(1+t_d/2\, s)}$

$\Rightarrow G_c^* = \frac{1}{\tilde{G}_-} \cdot f = \frac{(\tau_p s+1)(1+t_d/2\, s)}{k_p} \cdot \frac{1}{(\tau_c s+1)^r} \qquad r=1$

$= \frac{(\tau_p s+1)(t_d/2\, s+1)}{k_p(\tau_c s+1)}$ 0,2

el controlador equivalente

$G_c = \frac{G_c^*}{1 - G_c^* \tilde{G}} = \frac{(\tau_p s+1)(t_d/2\, s+1)}{k_p(\tau_c s+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\cancel{(\tau_p s+1)(t_d/2\, s+1)}}{\cancel{k_p}(\tau_c s+1)} \cdot \frac{\cancel{k_p}}{\cancel{\tau_p s+1}} \cdot \frac{1 - t_d/2\, s}{\cancel{1+t_d/2\, s}}}$ 0,2

$= \frac{1}{k_p} \cdot \frac{(\tau_p s+1)(t_d/2\, s+1)}{(\tau_c s \cancel{+1}) - (\cancel{1} - t_d/2\, s)} = \frac{(\tau_p s+1)(t_d/2\, s+1)}{k_p(\tau_c + t_d/2)s} =$ 0,5

$\Rightarrow$ PID con $k_c = \frac{1}{k_p}\left(\frac{2\frac{\tau_p}{t_d}+1}{2\frac{\tau_c}{t_d}+1}\right) \qquad \tau_I = \frac{t_d}{2} + \tau_p \qquad$ 0,20

$\tau_D = \frac{\tau_p}{2\frac{\tau_p}{t_d}+1}$

1,5

b) aproximamos $e^{-t_d s} = 1 - t_d s$ 0,2

$\Rightarrow \tilde{G}(s) = \frac{k_p}{\tau_p s+1}\, 1 - t_d s \qquad \tilde{G}_+ = 1 - t_d s \qquad$ 0,2

$\tilde{G}_- = \frac{k_p}{\tau_p s+1}$

0,2

$\Rightarrow G_c^* = \frac{1}{\tilde{G}_-} \cdot f = \frac{\tau_p s+1}{k_p} \cdot \frac{1}{(\tau_c s+1)^r} \qquad r=1$

$$\Rightarrow G_c = \frac{G_c^*}{1 - G_c^* \tilde{G}} = \frac{\tau_p s+1}{k_p(\tau_c s+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(\tau_p s+1)}{k_p(\tau_c s+1)} \cdot \frac{k_p}{\tau_p s+1}(1-t_d s)} \quad 0{,}2$$

$$= \frac{\tau_p s+1}{k_p\left((\tau_c s+\cancel{1}) - (\cancel{1} - t_d s)\right)} = \frac{\tau_p s+1}{k_p(\tau_c+t_d)s} \quad 0{,}5$$

$$\Rightarrow \text{PID con } k_c = \frac{\tau_p}{k_p(\tau_c+t_d)} \quad 0{,}2 \quad \tau_I = \tau_p$$

c) $t_d = 2$; $k_p = 1$; $\tau_p = 1$

$\tau_c > 0{,}2\,\tau_p$ $\quad$ $\tau_c \geq 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}2$ $\quad$ $\tau_c > 0{,}2$ $\quad$ 0,1

$\tau_c / t_d > 1{,}7$ $\quad$ $\tau_c > 1{,}7 \cdot t_d = 1{,}7 \times 2 = 3{,}4 \quad . \quad \tau_c > 3{,}4$

$$\Rightarrow (a) \text{ PID} \Rightarrow k_c = \frac{1}{k_p}\left(\frac{2\frac{\tau_p}{t_d}+1}{2\frac{\tau_c}{t_d}+1}\right) = 1\left(\frac{2\cdot\frac{1}{2}+1}{2\cdot\frac{3{,}4}{2}+1}\right) = \frac{2}{4{,}4} = 0{,}4545$$

$$\tau_I = \frac{t_d}{2} + \tau_p = 1+1 = 2$$

$$\tau_D = \frac{\tau_p}{2\frac{\tau_p}{t_d}+1} = \frac{1}{\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad 0{,}2$$

$$(b) \quad k_c = \frac{\tau_p}{k_p(\tau_c+t_d)} = \frac{1}{1(3{,}4+2)} = \frac{1}{5{,}4} = 0{,}1852 \quad 0{,}2$$

$$\tau_I = 1$$

PID $\quad AR(PID) = k_c\sqrt{\left(\omega\tau_D - \frac{1}{\omega\tau_I}\right)^2+1}$	PI $\quad k_c\frac{\sqrt{(\omega\tau_I)^2+1}}{\omega\tau_I}$
$\phi = \tan^{-1}\left(\omega\tau_D - \frac{1}{\omega\tau_I}\right)$	$\tan^{-1}(\omega\tau_I) - 90^\circ$

... Para el PID

$$\phi = \tan^{-1}\left(\omega\tau_D - \frac{1}{\omega\tau_I}\right) + -\tan^{-1}(\omega\tau_P) - \omega t_d$$

$$\tan^{-1}\left(0{,}5\,\omega_{co} - \frac{1}{2\omega_{co}}\right) + -\tan^{-1}(\omega_{co}) - 2\omega_{co} = -\pi$$

0,20

$\omega_{co} = 1{,}23$

$$\Rightarrow AR = \frac{k_P}{\sqrt{(\omega_{co}\tau_P)^2+1}} \times k_c\sqrt{\left(\omega_{co}\tau_D - \frac{1}{\omega_{co}\tau_I}\right)^2+1} = 0{,}2929 < 1 \text{ estable}$$

0,2 0,1

Para el PI

$$\phi = \tan^{-1}(\omega_{co}\overset{1}{\cancel{\tau_I}}) - \frac{\pi}{2} + -\tan^{-1}(\omega_{co}\overset{1}{\cancel{\tau_P}}) - \omega_{co}\overset{2}{\cancel{t_d}} = -\pi$$

$\Rightarrow \omega_{co} = 0{,}7854$ 0,2

0,2 0,1

$$AR = k_c\frac{\sqrt{(\omega\tau_I)^2+1}}{\omega\tau_I}\cdot\frac{k_P}{\sqrt{(\omega_{co}\tau_P)^2+1}} = 0{,}1506 < 1 \text{ estable.}$$

d)

La aproximación Padé es mejor que la de Taylor, esto permite incorporar más información en el controlador y con esto configurar un controlador más sofisticado PID.

La acción derivativa permite acceder a un kc mayor, con esto se aumenta la velocidad de la respuesta y se "mantiene bajo control" una posible respuesta oscilatoria.
kc (PID) = 0,4545; kc (PI) = 0.182.