Auxiliar 2 - IQ57A

Jaime Campos V

8 de octubre de 2009

Pregunta 1

Sea:

$$G_P(s) = \frac{5(1-0.5s)}{(2s+1)(0.5s+1)} \tag{1}$$

Asumiendo que $G_F(s) = G_M(s) = 1$ se le pide evaluar:

a. Un controlador proporcional. Para ello se requiere conocer el rango de valores para la ganancia proporcional del controlador que son adecuados para el sistema.

b. Un controlador descrito en un paper:

$$G_C(s) = K_C \frac{\tau_z s + 1}{\tau_I s + 1} \tag{2}$$

con $\tau_z = 0.5$ y determinando τ_I de tal manera que $K_C < 4$.

c. Los offset's en la respuesta del sistema frente a un cambio escalón unitario en la referencia si se ha escogido K_C iguala un 70% del K_C máximo en cada caso.

Pregunta 2

Las funciones de transferencia del proceso determinadas por su colega fueron:

$$G_p(s) = G_d(s) = \frac{5}{10s+1}\mathrm{e}^{-2s} \quad G_M(s) = \frac{1}{s+1} \quad G_f(s) = 1$$

El controlador seleccionado fue un PI con constante de tiempo integral igual a 5. En particular se le ha pedido determinar:

a. El mayor valor que se puede utilizar para la ganancia proporcional del controlador.

b. Su colega escogió la ganancia proporcioanl del controlador igual a 0.2 y usted sospecha que lo hizo en base a un cierto margen de ganancia o fase.Determine que márgenes debieron haber sido utilizados.

c. Suponiendo que usted prefiere utilizar un margen de ganancia igual a 1.7. ¿Cuál sería el valor de la ganancia proporcional en este caso? Explique.

d. Suponga ahora que un alumno en práctica ha determinado que la ganancia del proceso podría ser un 20% mayor. ¿Qué cree usted que pasará cuando se de marcha al proceso? Evalúe ambos escenarios (distintos K_C's determinados en los puntos anteriores) y discuta el efecto del margen de ganancia elegido por su colega y el suyo en el despeño del proceso.

Pregunta 3

Es necesario controlar un proceso con respuesta inversa cuya función de transferencia está dada por:

$$G_p = \frac{2(1-4s)}{(2s+1)(5s+1)} \qquad \text{con } G_f(s) = G_m(s) = 1$$

a. Dado un controlador proporcional puro, determine el rango de valores de KC que permite obtener un lazo cerrado estable?

b. Suponga que el proceso opera con $K_C = 0.5$. ¿Cuál es el offset de la respuesta frente a un cambio escalón unitario en la entrada?

c. Instale un compensador de respuesta inversa con función de transferencia:

$$g_{comp}(s) = \frac{10s}{(2s+1)(5s+1)} \tag{3}$$

Encuentre los valores de K_C para los cuales el sistema es estable.

d. Si el controlador proporcional y el compensador son reducidos a un solo bloque en el diagrama de bloques (Controlador aparente con función de transferencia $g_c^*(s)$), muestre que si $K_C \to \infty$ entonces $g_c^*(s)$ tiende a un controlador PID. ¿Cuáles son los valores de K_C , τ_I y τ_D para este controlador?

Pregunta 4

Dado un proceso con función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{2}{(5s+1)(2s-1)} \tag{4}$$

y suponiendo $G_m = G_f = 1$, determine si es posible controlarlo mediante:

a. Controlador P

b. Controlador PI

c. Controlador PD

Pauta Control 1

Problema 1

a)

$$Gp(s) = \frac{5}{(10s+1)} \cdot e^{-2s} = Gd(s)$$
$$Gf(s) = 1$$
$$Gc(s) = Kc \cdot \left(1 + \frac{1}{5s}\right)$$
$$Gm(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

Se utilizará el criterio de Bode:

$$G_{OL} = G_c \cdot G_p \cdot G_f \cdot G_m = Kc \cdot \left(1 + \frac{1}{5s}\right) \cdot \frac{5}{(10s+1)} \cdot e^{-2s} \cdot 1 \cdot \frac{1}{(s+1)}$$
$$AR_{OL} = AR_c \cdot AR_p \cdot AR_f \cdot AR_m = Kc\sqrt{1 + \frac{1}{(5W)^2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{1+(10W)^2}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(W)^2}}$$
$$\phi_{OL} = \phi_c \cdot \phi_p \cdot \phi_f \cdot \phi_m = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{5W}\right) - \tan^{-1}(10W) - 2W + 0 - \tan^{-1}(W)$$

- Primera condición: $\phi(Wco) = -180^{\circ}$:

$$-\tan^{-1}\left(\frac{1}{5W_{co}}\right) - \tan^{-1}(10W_{co}) - 2W_{co} - \tan^{-1}(W_{co}) = -\pi$$

➔ Wco = 0,4695 ≈ 0,47

- La otra condición es que AR(Wco) < 1, luego $K_{crítico}$ para AR=1

$$AR_{OL} = Kcritico \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(5W)^2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{1+(10W)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(W)^2}} = 1$$
$$Kcritico \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(5 \cdot 0,47)^2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{1+(10 \cdot 0,47)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(0,47)^2}} = 1$$
$$Kcritico \cdot 1,023 = 1$$

➔ $K_{critico} = 0{,}974$

Luego, para que sea estable Kc ≤ 0.974

b) Si se utilizó un margen de ganancia entonces:

$$Kc \cdot 1{,}023 = AR$$
$$AR = 0{,}2 \cdot 1{,}023 = 0{,}2046$$
$$GM = 1/AR = 1/0{,}2046 = 4{,}88$$

Margen de fase:

$$0{,}2 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{(5\cdot W)^2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{1+(10\cdot W)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(W)^2}} = 1$$

➔ W = 0,14

De esta manera:

$$-\tan^{-1}\left(\frac{1}{5\cdot 0{,}14}\right) - \tan^{-1}(10\cdot 0{,}14) - 2\cdot 0{,}14 - \tan^{-1}(0{,}14) = -\pi + \phi_F$$

➔ $\phi_F = 0{,}812$ rad
➔ $\phi_F = 0{,}812*(180/\pi) = 46{,}5°$

c)

$$\frac{1}{AR} = 1{,}7$$
$$AR = 0{,}5882$$
$$Kc \le \frac{0{,}5882}{1{,}023} = 0{,}575$$

d)

A)

$$Kcritico \cdot \sqrt{1+\frac{1}{(5\cdot 0{,}47)^2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{1+(10\cdot 0{,}47)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(0{,}47)^2}} = 1$$
$$Kcritico \cdot 1{,}227 = 1$$

- ➔ Kcritico=0,814 (no se puede usar el Kcritico de parte a, porque AR>1, es decir, el proceso es inestable)

B)

Kc=0,2
GM=4,07
AR=0,24

C)

Kc=0,47
GM=1,7
AR=0,588

*Mientras mayor sea el margen de ganancia se obtiene un Kc menor, esto implica una respuesta más lenta, pero asegura estabilidad.

Pauta Control 2

Problema 3

a)

$$Gp(s) = \frac{2(1-4s)}{(2s+1)(5s+1)}$$
$$Gf(s) = 1$$
$$Gc(s) = Kc$$
$$Gm(s) = 1$$

Ecuación Característica:

$$1 + G_c \cdot G_p \cdot G_f \cdot G_m = 0$$
$$1 + Kc \cdot \frac{2(1-4s)}{(2s+1)(5s+1)} \cdot 1 \cdot 1 = 0$$
$$(2s+1)(5s+1) + 2Kc(1-4s) = 0$$
$$10s^2 + 7s + 1 + 2Kc - 8Kc \cdot s = 0$$
$$10s^2 + (7-8Kc)s + (1+2Kc) = 0$$
$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

Luego se debe cumplir que a_0, a_1 y $a_2 > 0$, por lo tanto:

$$2Kc + 1 > 0 \Rightarrow Kc > -\frac{1}{2}$$
$$7 - 8Kc > 0 \Rightarrow Kc < \frac{7}{8}$$

b)

$$G_{LC} = \frac{G_c \cdot G_p \cdot G_f}{1 + G_c \cdot G_p \cdot G_f \cdot G_m} = \frac{Kc \cdot \frac{2(1-4s)}{(2s+1)(5s+1)} \cdot 1}{1 + Kc \cdot \frac{2(1-4s)}{(2s+1)(5s+1)} \cdot 1 \cdot 1} = \frac{0{,}5 \cdot \frac{2(1-4s)}{(2s+1)(5s+1)}}{1 + 0{,}5 \cdot \frac{2(1-4s)}{(2s+1)(5s+1)}}$$

$$G_{LC} = \frac{1-4s}{(2s+1)(5s+1) + (1-4s)}$$

Aplicando teorema del valor final:

$$y_\infty = \lim(s \to 0)\left(s \cdot G_{LC} \cdot \frac{1}{s}\right) = \lim(s \to 0)\left(\frac{1-4s}{(2s+1)(5s+1) + (1-4s)}\right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Luego $offset = 1 - y_\infty = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5$

c) Primero se resuelve como lazo cerrado el controlador con el compensador:

$$Gc^* = \frac{G_c}{1+G_cG_{comp}} = \frac{Kc}{1+Kc\dfrac{10s}{(2s+1)(5s+1)}}$$

Luego la Ecuación Característica para el sistema queda:

$$1+G_c^* \cdot G_p = 0$$
$$1+\frac{Kc}{1+Kc\dfrac{10s}{(2s+1)(5s+1)}}\cdot\frac{2(1-4s)}{(2s+1)(5s+1)} = 0$$
$$1+\frac{2Kc(1-4s)}{(2s+1)(5s+1)+10Kc\cdot s}$$
$$(2s+1)(5s+1)+10Kc\cdot s+2Kc(1-4s) = 0$$
$$10s^2+7s+1+10Kc\cdot s+2Kc-8Kc\cdot s = 0$$
$$10s^2+(7+2Kc)s+(1+2Kc) = 0$$
$$a_0s^2+a_1s+a_2 = 0$$

Por lo tanto

$$2Kc+1>0 \Rightarrow Kc>-\frac{1}{2}$$
$$7+2Kc>0 \Rightarrow Kc>-\frac{7}{2}$$

d)

$$Gc^* = \frac{Kc}{1+Kc\dfrac{10s}{(2s+1)(5s+1)}} = \frac{Kc(2s+1)(5s+1)}{(2s+1)(5s+1)+10sKc} = \frac{(2s+1)(5s+1)}{\dfrac{1}{Kc}\cdot(2s+1)(5s+1)+10s}$$

$$\lim(Kc\to\infty)(Gc^*) = \frac{(2s+1)(5s+1)}{10s} = \frac{10s^2+7s+1}{10s} = s+\frac{7}{10}+\frac{1}{10s} = \frac{7}{10}\left(1+\frac{1}{7s}+\frac{10}{7}s\right)$$

$$PID = Kc\left(1+\frac{1}{\tau_I s}+\tau_D s\right)$$

$$Kc = \frac{7}{10}$$

$$\tau_I = 7$$

$$\tau_D = \frac{10}{7}$$

Problema 4

a) Gc = Kc

$$Gp(s)=\frac{2}{(2s-1)((5s+1)}$$
$$Gf(s)=1$$
$$Gc(s)=Kc$$
$$Gm(s)=1$$

Ecuación Característica:

$$1+G_c\cdot G_p\cdot G_f\cdot G_m=0$$
$$1+Kc\cdot\frac{2}{(2s-1)(5s+1)}\cdot 1\cdot 1=0$$
$$(2s-1)(5s+1)+2Kc=0$$
$$10s^2-3s-1+2Kc=0$$
$$10s^2-3Kc\cdot s+(2Kc-1)=0$$
$$a_0s^2+a_1s+a_2=0$$

Se puede apreciar que a_1 es negativo y nunca será positivo por lo que NO es posible estabilizar el lazo cerrado con un controlador proporcional.

b) $Gc(s)=Kc\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)=\frac{Kc}{\tau_I s}(\tau_I s+1)$

Ecuación Característica:

$$1+G_c\cdot G_p\cdot G_f\cdot G_m=0$$
$$1+\frac{Kc}{\tau_I s}(\tau_I s+1)\cdot\frac{2}{(2s-1)(5s+1)}\cdot 1\cdot 1=0$$
$$\tau_I s(2s-1)(5s+1)+2Kc(\tau_I s+1)=0$$
$$\tau_I s(10s^2-3s-1)+2Kc\tau_I s+2Kc=0$$
$$10\tau_I s^3-3\tau_I s^2-\tau_I s+2Kc\tau_I s+2Kc=0$$
$$10\tau_I s^3-3\tau_I s^2+(2Kc\tau_I-\tau_I)s+2Kc=0$$
$$a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=0$$

Escribiendo la Matriz de Routh:

1	$10\tau_I$	$(2Kc\tau_I-\tau_I)$
2	$-3\tau_I$	$2Kc$
3	$(2Kc\tau_I-\tau_I+\frac{20}{3}Kc)$	
4	$2Kc$	

Luego como toda la primera columna debe ser positiva para ser estable se puede apreciar que los elementos de la fila 1 y 2 no son compatibles ($10\tau_I > 0$ y $-3\tau_I > 0$) por lo que NO es posible estabilizar el lazo cerrado con un controlador proporcional integral.

c) $Gc(s) = Kc(1+\tau_D s)$

Ecuación Característica:

$$1 + G_c \cdot G_p \cdot G_f \cdot G_m = 0$$

$$1 + Kc(1+\tau_D s) \cdot \frac{2}{(2s-1)(5s+1)} \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$(2s-1)(5s+1) + 2Kc(1+\tau_D s) = 0$$

$$10s^2 - 3s - 1 + 2Kc\tau_D s + 2Kc = 0$$

$$10s^2 + (2Kc\tau_D - 3)s + (2Kc - 1) = 0$$

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

Luego se debe cumplir que a_0, a_1 y $a_2 > 0$, por lo tanto:

$$10 > 0$$

$$2Kc - 1 > 0 \Rightarrow Kc > \frac{1}{2}$$

$$2Kc\tau_D - 3 > 0 \Rightarrow \tau_D > \frac{3}{2Kc}$$

Por lo tanto es posible estabilizar el sistema mediante un controlador PD.