Auxiliar 1
Dinámica y Control de Procesos

Jaime Campos Valenzuela

Departamento de Ingeniería Química y Biotecnología
Universidad de Chile

2009-08-29

Problema 1

- Considere un sistema de alto orden, compuesto por varios primeros orden en serie, no interactuantes: ¿Cómo es la función de transferencia para n sistemas?

La función de transferencia de una serie de funciones de transferencia será el producto de las funciones porque si a_1 es la entrada a un primer proceso de función de transferencia G_1 y a_2 es la salida, entonces $a_2 = G_1 \cdot a_1$.
Si ahora a_2 es la entrada a una segunda función G_2 en serie, que produce la salida a_3, entonces $a_3 = G_2 \cdot a_2$; si se reemplaza a_2 por su equivalente, entonces $a_3 = G_2 * G_1 * a_1$.
Así entonces:

$$G = \prod G_i \tag{1}$$

- ¿Es estable el sistema?

La función G será de orden n cuando el proceso consiste de n primero ordenes conectados en serie. Entonces:

$$G_n(s) = \prod G_i(s) \text{ con } G_i(s) = \frac{K_i(s)}{\tau_i(s) + 1} \Rightarrow \tag{2}$$

$$G_n(s) = \frac{\prod K_i}{(\tau_1 \cdot s + 1)(\tau_2 \cdot s + 1) \ldots (\tau_n \cdot s + 1)} \tag{3}$$

de modo que el polinomio característico es:

$$(\tau_1 \cdot s + 1)(\tau_2 \cdot s + 1) \ldots (\tau_n \cdot s + 1) = 0 \text{ i.e. } p_i = -\frac{1}{\tau_i} \tag{4}$$

Si cada uno de los sistemas de primer orden en la serie es estable, entonces cada primer orden tiene un polo real negativo, por ende estable. Si cada polo es menor que cero, el proceso de orden n es estable.

- ¿Bajo qué condiciones puede oscilar el sistema?

De acuerdo al análisis recien expuesto, el sistema compuesto por una serie de primeros ordenes, NO puede oscilar porque no hay polos complejos.

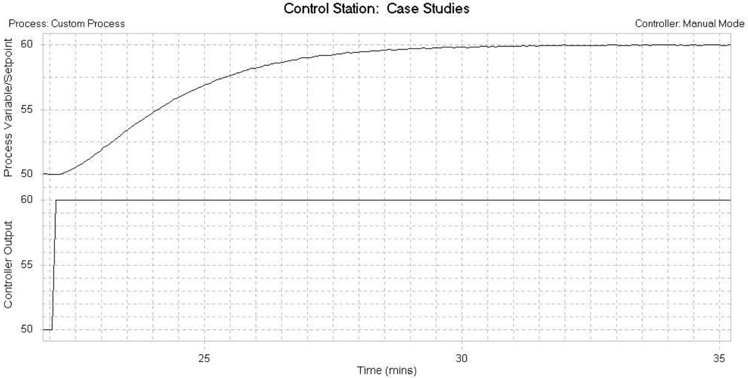
- La respuesta de la serie de *n* sistemas ¿responde más rápido o mas lento que los sistemas originales?

El tiempo de respuesta equivalente del sistema de alto orden es el producto de los tiempos de respuesta de cada sistema en la serie (por ejemplo, para segundo orden, el tiempo de respuesta es la raíz del producto de los dos tiempos de respuesta) de modo que el sistema es mas lento que cualquiera de los sistemas en la serie.

Comente otras características sobresalientes del sistema en serie.

- Los sistemas compuestos por una conexión en serie de sistemas de primer orden será siempre sobre amortiguada o de amortiguación crítica pero no pueden nunca oscilar.
- En cambio, si un proceso en una serie es de alto orden intrínseco y puede responder oscilatoriamente, sus polos con parte imaginaria lo serán también del sistema en serie, de modo que habrá respuesta oscilatoria de toda la serie.
- Los polos de cada sistema en una serie son polos de la conexión en serie; así, las características dinámicas de los sistemas en serie provienen de la respuesta dinámica de cada sub sistema.

Comente el siguiente sistema:



Problema 2

Enunciado

En inmunología es sabido que el proceso de vacunación es resultado de la respuesta combinada de dos subsistemas en oposición: el subsistema causante de la enfermedad (subsistema 1) que promueve la replicación de la enfermedad y el subsistema inmunológico que produce los anticuerpos apropiados para combatir las células intrusas (subsistema 2).
Un sistema inmune sano generará anticuerpos que terminarán por eliminar la enfermedad, permaneciendo en el torrente sanguíneo a la espera de nuevos ataques de las células intrusas.

Suponga que la función de transferencia entre $\bar{x_1}'$ (número de células intrusas) y la dosis de vacuna $\bar{u}'$ está dada por:

$$\bar{x_1}'(s) = \frac{K_1}{s(\tau_1 s + 1)}\bar{u}'(s)$$

y que la función de transferencia entre el número de anticuerpos $\bar{x_2}'$ y la dosis de vacuna $\bar{u}'$ puede ser aproximada por:

$$\bar{x_2}'(s) = \frac{K_2}{s(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}\bar{u}'(s)$$

Luego un índice del grado de inmunización puede definirse como:

$$\bar{y}'(s) = \frac{-1}{|K_2 - K_1|}\bar{x_1}'(s) + \frac{1}{|K_2 - K_1|}\bar{x_2}'(s)$$

En su análisis suponga que un sistema inmune sano es tal que:

$$K_2 > K_1$$

y que una vacuna es efectiva si se cumple que:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2 + \tau_3} < \frac{K_1}{K_2}$$

Entonces:

1. Dibuje un diagrama de bloques del sistema y demuestre que un sistema inmune sano bajo el efecto de una vacuna efectiva presenta una respuesta inversa.
2. Caracterice la respuesta dinámica de cada subsistema detalladamente frente a una entrada impulso unitaria. Utilice los parámetros de las formas canónicas para realizar su análisis. En particular pruebe que el subsistema 2 es un sistema sobre amortiguado (o a lo más críticamente amortiguado).

Hint: Recuerde que una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con todos sus coeficientes estrictamente positivos tiene todas sus raíces negativas. Además, cada cambio de signo en los coeficientes de la ecuación índica la presencia de una raíz positiva.

1. Suponga que $5cm^3$ de vacuna fueron inyectados en un individuo para el cual: $K_1 = 0{,}5K_2$, $\tau_1 = 2hr$, $\tau_2 = 3hr$ y $\tau_3 = 5hr$. Compruebe si el individuo tiene un sistema inmune sano y si la vacuna es efectiva en este caso. Si modela la administración de la vacuna como una impulso ideal unitario: ¿Cómo será la respuesta del índice del grado de inmunización? dibuje un esquema de la respuesta y fundamente claramente su respuesta.
2. ¿Qué sucede en el caso del sistema inmune deprimido $K_1 > K_2$?, ¿Se producirá repuesta inversa?. Discuta el significado de la respuesta final del sistema.

Problema 3

Dado su buen desempeño en la asignación anterior se le ha pedido hacerse cargo de la evaluación del modelo de un proceso de destilación aguas abajo en el proceso. La función de transferencia para la cabeza de la torre de destilación está dada por:

$$\overline{y'}(s) = \frac{12{,}8e^{-s}}{16{,}7s + 1}\overline{u'}(s) + \frac{3{,}8e^{-8s}}{14{,}9s + 1}\overline{d'}(s)$$

Modelo que sigue la forma: $\overline{y'}(s) = G_P(s) \cdot \overline{u'}(s) + G_d \cdot \overline{d'}(s)$, donde $\overline{d'}(s)$ es la perturbación y $\overline{u'}(s)$ es la entrada.

1. Obtenga la respuesta del proceso cuando ocurre un cambio escalón unitario en la perturbación, seguido de un cambio escalón unitario en la entrada 90 unidades de tiempo después. Identifique y señale claramente todos los puntos importantes en su esquema.
2. Suponga ahora que configura la entrada $\overline{u'}(s)$ para que está determinada por la siguiente expresión:

$$\overline{u'}(s) = G_{FF} \cdot \overline{d'}(s)$$

con G_{FF} dado por:

$$G_{FF} = \frac{-G_d(s)}{G_P(s)}$$

¿Cómo será la respuesta del sistema frente a un cambio escalón en la perturbación? Discuta el efecto de distintos tipos de perturbaciones. Obtenga una expresión para el comportamiento dinámico de $u'(t)$ como resultado de un escalón unitario en la perturbación. ¿Cuál será el estado estacionario de $u'(t)$?

1. Suponga que ha habido un error en la determinación de G_d en la expresión anterior y se ha configurado G_{FF} para ser igual a:

$$G_{FF} = \frac{-\widetilde{G_d}(s)}{G_P(s)}$$

con

$$\widetilde{G_d}(s) = \frac{3{,}42}{11{,}92s + 1} e^{-8s}$$

¿Qué efecto tendrá este error en la dinámica de respuesta del sistema frente a un cambio escalón unitario en la perturbación?

IQ57A- Dinámica y Control de Procesos

Auxiliar 1

Profesor: Cristian Salgado

Auxiliar: Jaime Campos

Primavera 2009

Problema 2

a) Sea

$$G1(s)=\frac{\overline{x_1}(s)}{u(s)}=\frac{K_1}{s(\tau_1 s+1)}$$

$$G2(s)=\frac{\overline{x_2}(s)}{u(s)}=\frac{K_2}{s(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)}$$

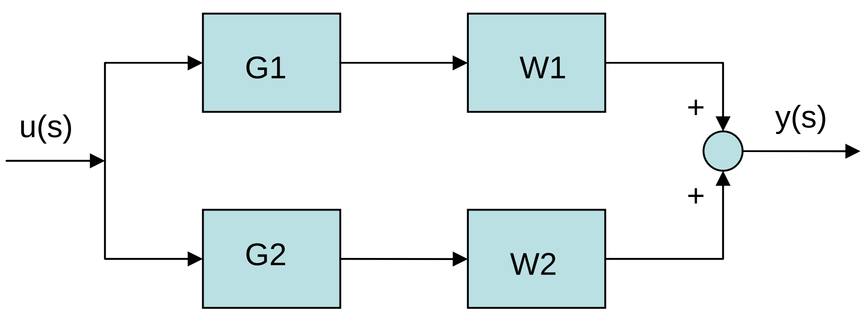
$$\overline{y}(s)=w_1\overline{x_1}(s)+w2\overline{x_2}(s)$$

Con

$$w_1=\frac{-1}{|K_2-K_1|}$$

$$w_2=\frac{1}{|K_2-K_1|}$$

Luego el Diagrama de Bloques es:



Como K2>K1, entonces $|K2-K1|=(K2-K1)$

$$\overline{y}(s)=\frac{+1}{(K2-K1)}\left(\frac{K_2}{s(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)}-\frac{K_1}{s(\tau_1 s+1)}\right)\cdot\overline{u}(s)$$

$$\overline{y}(s)=\frac{1}{(K2-K1)}\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{K_2(\tau_1 s+1)-K_1(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)}{(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)(\tau_1 s+1)}\right)\cdot\overline{u}(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

Polos del sistema tal que Q(s)=0:

$$Q(s) = s(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)(\tau_1 s + 1) = 0$$

$$P1 = 0$$
$$P2 = \frac{-1}{\tau_1}$$
$$P3 = \frac{-1}{\tau_2}$$
$$P4 = \frac{-1}{\tau_3}$$

Ceros de la función de transferencia ➔ P(s)=0:

$$\begin{aligned}
P(s) &= K_2(\tau_1 s + 1) - K_1(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) = 0 \\
0 &= K_2\tau_1 s + K_2 - K_1(\tau_2\tau_3 s^2 + (\tau_2 + \tau_3)s + 1) \\
0 &= K_2\tau_1 s + K_2 - K_1\tau_2\tau_3 s^2 - K_1(\tau_2 + \tau_3)s - K_1 \\
0 &= -K_1\tau_2\tau_3 s^2 + (K_2\tau_1 - K_1(\tau_2 + \tau_3))s + (K_2 - K_1) \\
0 &= K_1\tau_2\tau_3 s^2 - (K_2\tau_1 - K_1(\tau_2 + \tau_3))s - (K_2 - K_1) \qquad (*) \\
0 &= as^2 + bs + c
\end{aligned}$$

a > 0, para $K_1 > 0$ y τ_1 y $\tau_2 > 0$

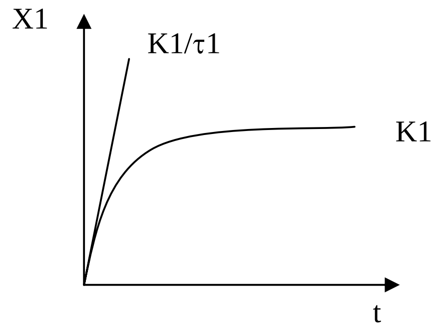
$b = -K_2\tau_1 + K_1(\tau_2 + \tau_3) > 0$, para $\frac{\tau_1}{\tau_2 + \tau_3} < \frac{K_1}{K_2} \Rightarrow \tau_1 K_2 < K_1(\tau_2 + \tau_3)$

$c = -(K_2 - K_1) < 0$

Hay 1 cambio de signo y por lo tanto una raíz positiva ➔ Respuesta inversa.

b) SubSitema 1

$\overline{x_1} = \frac{K_1}{s(\tau_1 s + 1)} \cdot 1$ La inversión de esta expresión es de primer orden.



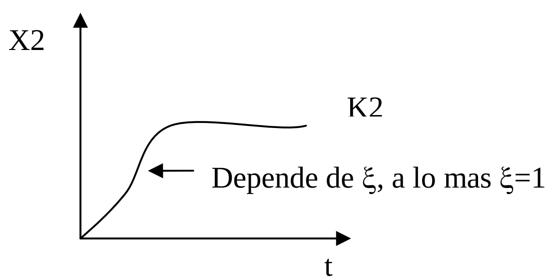
SubSistema 2

$$\overline{x_2} = \frac{K_2}{s(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} = \frac{K_2}{s(\tau_2 \tau_3 s^2 + (\tau_2 + \tau_3)s + 1)}$$

$$\Rightarrow \tau^2 = \tau_2 \tau_3$$

$$\Rightarrow 2\tau\xi = \tau_2 + \tau_3$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\tau_2 + \tau_3}{2\sqrt{\tau_2 \tau_3}}$$



Necesitamos averiguar si $\xi = 1$, $\xi < 1$, $\xi > 1$

Supongamos $\xi < 1$, “subamortiguado”

$$\xi = \frac{\tau_2 + \tau_3}{2\sqrt{\tau_2 \tau_3}} < 1$$

$$\tau_2 + \tau_3 < 2\sqrt{\tau_2 \tau_3}$$

$$(\tau_2)^2 + 2\tau_2\tau_3 + (\tau_3)^2 < 4\tau_2\tau_3$$

$$(\tau_2)^2 - 2\tau_2\tau_3 + (\tau_3)^2 < 0$$

$$(\tau_2 - \tau_3)^2 < 0$$

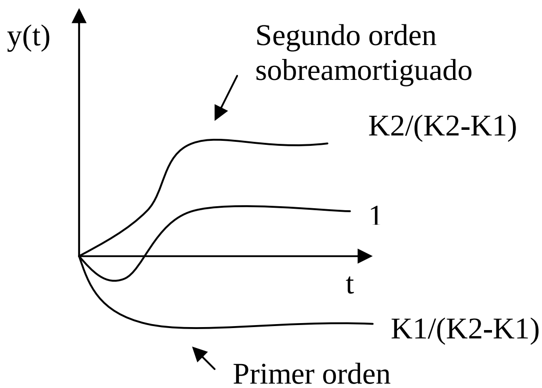
Luego no puede ser subamortiguado ➔ por lo tanto es un sistema sobreamortiguado ($\xi > 1$) o críticamente amortiguado ($\xi = 1$).

c) Dado K1 = 0,5*K2 ➔ K1/K2 = 0,5, luego se cumple la primera condición K2>K1.

La segunda condición también se cumple: $\frac{\tau_1}{\tau_2 + \tau_3} = \frac{2}{3+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} < 0{,}5$

Para $\mu(t) = impulso - ideal - unitario$ ➔ u(s) = 1.

$$\lim(t \to \infty) y(t) = \lim(s \to 0) s \cdot \frac{1}{K_2 - K_1} \cdot \frac{1}{s}\left(\frac{K_2}{(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)} - \frac{K_1}{(\tau_1 s+1)}\right) \cdot 1$$
$$= \frac{K_2 - K_1}{K_2 - K_1} = 1$$



d) En el caso K1 > K2, no se tiene cambios de signo en (*), luego todas las raíces son negativas, por lo que no hay respuesta inversa. En este caso la respuesta final será:

$$\lim(t \to \infty) y(t) = \lim(s \to 0) s \cdot \frac{1}{|K_2 - K_1|} \cdot \frac{1}{s}\left(\frac{K_2}{(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)} - \frac{K_1}{(\tau_1 s+1)}\right) \cdot 1$$
$$= \frac{K_2 - K_1}{|K_2 - K_1|} = -1$$

El sistema estará dominado por la cinética de la enfermedad.

Problema 2

Dado su buen desempeño en la asignación anterior se le ha pedido hacerse cargo de la evaluación del modelo de un proceso de destilación aguas abajo en el proceso. La función de transferencia para la cabeza de la torre de destilación está dada por:

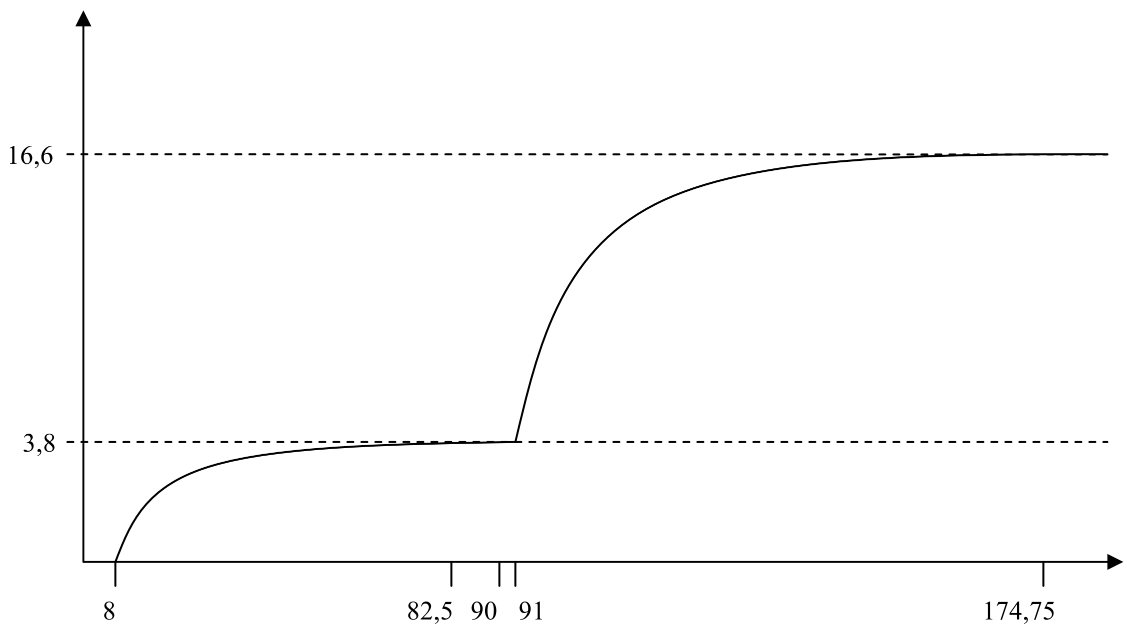
$$\overline{y'}(s) = \frac{12.8e^{-s}}{16.7s+1}\overline{u'}(s) + \frac{3.8e^{-8s}}{14.9s+1}\overline{d'}(s)$$

Modelo que sigue la forma: $\overline{y'}(s) = G_P(s)\cdot\overline{u'}(s) + G_d\cdot\overline{d'}(s)$, donde $\overline{d'}(s)$ es la perturbación y $\overline{u'}(s)$ es la entrada.

(a) Obtenga la respuesta del proceso cuando ocurre un cambio escalón unitario en la perturbación, seguido de un cambio escalón unitario en la entrada 90 unidades de tiempo después. Identifique y señale claramente todos los puntos importantes en su esquema.

Ganancia de G_p = 12,8.
Ganancia de G_d = 3,8.
Ganancia final = 16,6.

Tiempo estado estacionario de G_d = 8 + 5*14,95 = 8274,5 < 90.
Tiempo estado estacionario de G_p = 90 + 1 + 5*16,75 = 174,75



(b) Suponga ahora que configura la entrada $\overline{u'}(s)$ para que esté determinada por la siguiente expresión:

$$\overline{u'}(s) = G_{FF} \cdot \overline{d'}(s)$$

con G_{FF} dado por:

$$G_{FF} = \frac{-G_d(s)}{G_P(s)}$$

¿Cómo será la respuesta del sistema frente a un cambio escalón en la perturbación? Discuta el efecto de distintos tipos de perturbaciones. Obtenga una expresión para el comportamiento dinámico de $u'(t)$ como resultado de un escalón unitario en la perturbación. ¿Cuál será el estado estacionario de $u'(t)$?

$$\overline{y}' = G_p \times \overline{u}' + G_d \times \overline{d}'$$

Reemplazando

$$\overline{y}' = G_p \times \frac{G_d}{G_p} \times \overline{d}' + G_d \times \overline{d}'$$

$$\overline{y}' = 0$$

El sistema es inmune a cualquier perturbación.

Comportamiento dinámico de u'(t)

$$\overline{u}'(s) = -\frac{3{,}8e^{-8s}}{14{,}95s+1} \times \frac{1}{\dfrac{12{,}8e^{-s}}{16{,}7s+1}} \times \overline{d}'$$

$$\overline{u}'(s) = -0{,}2969 \frac{(16{,}7s+1)}{(14{,}9s+1)} e^{-7s} \times \frac{1}{s}$$

$$\overline{u}'(s) = -0{,}2969 \frac{16{,}7s}{(14{,}9s+1)} \frac{1}{s} e^{-7s} - 0{,}2969 \frac{1}{(14{,}9s+1)} \frac{1}{s} e^{-7s}$$

$$\overline{u}'(s) = -\frac{4{,}9}{(14{,}9s+1)} e^{-7s} - \frac{0{,}2969}{(14{,}9s+1)} \frac{1}{s} e^{-7s}$$

Antitransformando:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$$

$$-\frac{4{,}9}{(14{,}9s+1)} e^{-7s} \rightarrow -\frac{4{,}9}{14{,}9} e^{\frac{-(t-7)}{14{,}9}}$$

$$-\frac{0{,}2969}{(14{,}9s+1)} \frac{1}{s} e^{-7s} \rightarrow -0{,}2969\left(1 - e^{\frac{-(t-7)}{14{,}9}}\right)$$

$$u' = -0{,}3329e^{\frac{-(t-7)}{14{,}9}} - 0{,}2969\left(1 - e^{\frac{-(t-7)}{14{,}9}}\right)$$

(c) Suponga que ha habido un error en la determinación de G_d en la expresión anterior y se ha configurado G_{FF} para ser igual a:

$$G_{FF} = \frac{-\widetilde{G_d}(s)}{G_P(s)}$$

con

$$\widetilde{G_d}(s) = \frac{3.42}{11.92s+1}e^{-8s}$$

¿Qué efecto tendrá este error en la dinámica de respuesta del sistema frente a un cambio escalón unitario en la perturbación?

$$\bar{y}' = -\frac{3{,}42}{(11{,}92s+1)} \times e^{-8s} \times \frac{1}{s} + \frac{3{,}8}{(14{,}9s+1)} \times e^{-8s} \times \frac{1}{s}$$

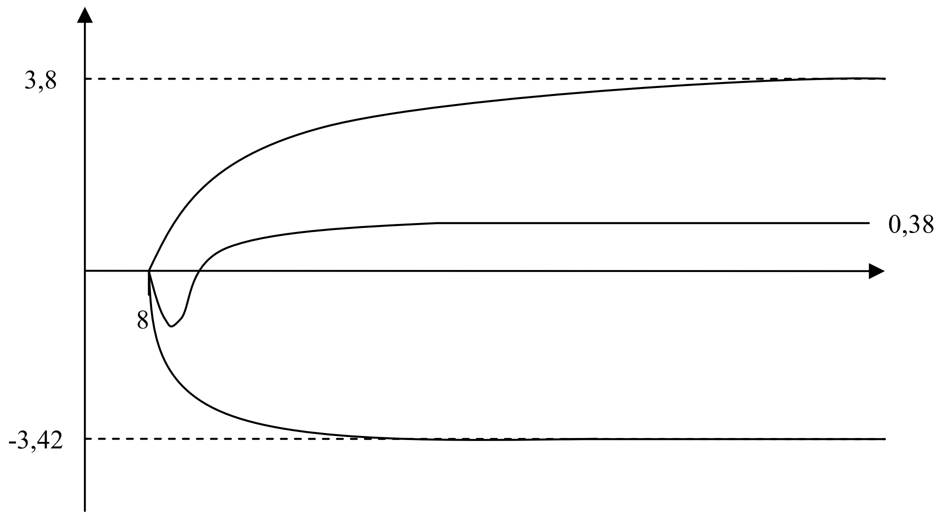
Mismo retardo para ambas partes del sistema.

Pendiente de la parte negativa: -3,42/11,92 = -0,28
Valor final parte negativa: -3,42

Pendiente de la parte positiva: 0,25
Valor final parte positiva: 3,8

Valor final del sistema: 0,38

Como el inicialmente la pendiente de la parte negativa es mayor que la positiva, la respuesta del sistema es negativa. Sin embargo, como la ganancia de la parte positiva es mayor que la negativa, el valor final del sistema es positivo. En conclusión se tiene respuesta inversa.


3,8
0,38
8
-3,42