IQ36A FENOMENOS DE TRANSPORTE, SEMESTRE 08-1

GUIA CAPITULO 6.2
Cap. 6.2: Ecuación de Navier-Stokes.

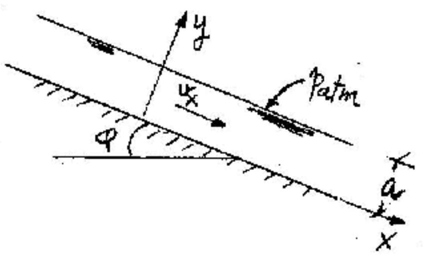
PROBLEMA 6.2-1.- Flujo uniforme con superficie libre, a lo largo de un plano inclinado.

Analizar el flujo gravitacional de un líquido en dirección "x" a lo largo de un plano inclinado, de ancho infinito, que forma un ángulo φ con la horizontal. Se supone que el líquido se mueve como una capa de altura uniforme "a" y está expuesto a la atmósfera en la superficie libre.

a) Demostrar que las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a la única expresión:

$$g_x + \nu\,(d^2v_x/dy^2) = 0$$

cuando se aplican las siguientes hipótesis: (1) Flujo laminar; (2) Velocidad sólo en dirección x; (3) Fluido incompresible; (4) Flujo estacionario; (5) Superficie del líquido a presión atmosférica. (Se recomienda usar una hoja con las ecuaciones completas y marcar cada término anulado con el número de la hipótesis que lo justifica, para estar así seguros de que se ha demostrado lo que se pide).



b) Integrar la ecuación para encontrar v_x, usando las siguientes condiciones de borde:

(i) Velocidad nula en la pared del plano inclinado.
(ii) Esfuerzo tangencial nulo en la superficie de contacto con la atmósfera (esto implica despreciar una leve resistencia friccional presentada por el aire).

Solución: a) Aplicación de las hipótesis para anular términos en las ecs. de Navier-Stokes:

Hipótesis 1 (H1): Flujo laminar: La velocidad del fluido es paralela a la pared: $v_y = 0$.

H2: Velocidad sólo en dirección x: Esto implica suponer que $v_z = 0$.

H3: Fluido incompresible: Se aplica la ecn. de continuidad $\nabla \bullet \mathbf{v} = 0$. Tomando la forma desarrollada de este operador vectorial de la tabla, vemos que se reduce a: $\partial v_x/\partial x = 0$ y, en consecuencia, también $\partial^2 v_x/\partial x^2 = 0$.

H4: Flujo estacionario: $\partial/\partial t = 0$.

H5: Superficie del líquido a presión atmosférica. Esta hipótesis requiere algún análisis: La ecn. (C), con las hipótesis anteriores y considerando que la aceleración de gravedad no tiene componente en la dirección z, se reduce a: $\partial p/\partial z = 0$. Análogamente, la ecn. (B) se reduce a: $\partial p/\partial y = \rho\, g_y$ = constante. Como en la superficie, y = a, se tiene $p = p_{atm}$ = constante, se deduce que $\partial p/\partial x = 0$ en todas partes.

H6: Ancho infinito: Esta hipótesis permite anular el término $\partial^2 v_x/\partial z^2$ **.**

Se obtiene así como resultado la ecuación del enunciado: $g_x + \nu\,(d^2v_x/dy^2) = 0$, en que la derivada parcial se transforma en derivada total porque v_x sólo depende de y.
b) Condiciones de borde para la integración:

(i) Velocidad nula en la pared: $y = 0$: $v_x = 0$.
(ii) Esfuerzo tangencial nulo en la superficie libre: $\tau_{yx} = 0$ en $y = a$.

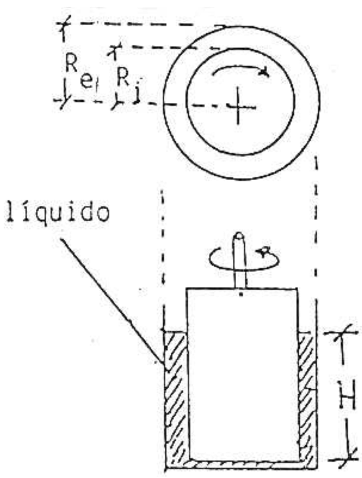
El primer subíndice del esfuerzo tangencial designa la normal a la superficie en la cual actúa (la superficie libre es un plano perpendicular al eje y). El segundo subíndice designa la dirección del esfuerzo (que actúa en la dirección negativa del eje x). La fórmula se encuentra en la tabla del esfuerzo tangencial:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

Como $v_y = 0$, la condición (ii) se reduce a : $\partial v_x/\partial y = 0$ en $y = a$.

Integrando dos veces la ecuación diferencial, se obtiene:
$v_x = -(g_x y^2 / 2\nu) + c_1 y + c_2$
en que c_1 y c_2 son las constantes de integración. Mediante las dos condiciones de borde, se obtiene finalmente:
$v_x = -(g_x y^2 / 2\nu) + (g_x a y / \nu)$

PROBLEMA 6.2-2.- Medición de la viscosidad



Un aparato para medir viscosidades de líquidos consta de dos vasos cilíndricos concéntricos. Se coloca el líquido en el espacio anular entre ambos cilindros. El vaso interior gira a velocidad angular Ω conocida; se mide el torque T_w que resulta de la fricción en la pared de uno cualquiera de los vasos; del torque se calcula el esfuerzo tangencial; se aplican finalmente las ecs. de Navier-Stokes para obtener la viscosidad del líquido.

Para este fin, aplicamos las siguientes hipótesis para simplificar las ecuaciones de Navier-Stokes en flujo laminar:
flujo estacionario,
eje z vertical hacia arriba,
trayectorias concéntricas en planos z = const.,
simetría axial.

Notar además que una de las condiciones de borde es: en $r = R_i$, $v_{\theta i} = \Omega\, R_i$ para todo z. Esto requiere postular que v_θ es independiente de z (de lo contrario, no podríamos encontrar una solución particular simple). En consecuencia: $\partial v_\theta/\partial z = 0$

a) Con las hipótesis indicadas, obtener una relación entre el torque en el eje de rotación y la viscosidad del líquido.
b) Aplicar la solución analítica para calcular la viscosidad de un líquido cuando se mide un torque igual a 0,28 (N cm). Los datos del viscosímetro son: radio del rotor R_i = 2 cm; radio del vaso exterior fijo R_e = 2,2 cm; altura del líquido H = 5,4 cm; velocidad de rotación Ω = 200 RPM.

Solución: a) En primer lugar, se establece una relación entre el torque en el eje en la pared del cilindro interior (T_{wi}) y el esfuerzo tangencial en la pared.

En la pared interior (superficie normal al eje r) actúa un esfuerzo tangencial en la dirección tangencial θ; por lo tanto, la designación general es $\tau_{r\theta}$, y por actuar en la pared interior, es $\tau_{r\theta i}$. Sobre un elemento de área dA_i, el elemento de fuerza es $\tau_{r\theta i}\ dA_i$ y el elemento de torque es un vector en la dirección axial z, de magnitud igual a la fuerza elemental por el brazo R_i, esto es: $dT_{wi} = \tau_{r\theta i}\ dA_i\ R_i$.

El mismo torque actúa sobre cada uno de los elementos dA_i que componen la superficie total del cilindro interior $A_i = 2\,\pi\, R_i\, H$. Como todos estos vectores tienen la misma dirección axial (z), se suman para dar el torque total:

$$T_{wi} = \tau_{r\theta i}\ A_i\ R_i \qquad (1)$$

Si se repite el mismo análisis para la pared del cilindro exterior de radio R_e, se obtiene en forma análoga: $T_{we} = \tau_{r\theta e}\ A_e\ R_e$. Como el sistema está en equilibrio, girando con velocidad angular constante, ambos torques deben ser iguales.

Para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, se aplican las hipótesis del enunciado, que conducen a las siguientes condiciones matemáticas:

- flujo estacionario: $\partial/\partial t = 0$;
- eje z vertical hacia arriba, esto es, las componentes de la aceleración de gravedad son: $g_z = -g$; $g_r = g_\theta = 0$;
- trayectorias concéntricas en planos z = const., esto es: $v_r = v_z = 0$.
- simetría axial, esto es: $\partial/\partial\theta = 0$.
- v_θ independiente de z: $\partial v_\theta/\partial z = 0$

La ecuación de Navier-Stokes (ecuación E) se reduce a:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv_\theta)}{dr}\right) = 0 \qquad (2)$$

Las condiciones de borde son:

Para $r = R_i$: $v_\theta = \Omega R_i$, para todo z.

Para $r = R_e$: $v_\theta = 0$, para todo z.

La integración conduce a:

$$v_\theta = \frac{\Omega R_i^2}{r}\,\frac{R_e^2 - r^2}{R_e^2 - R_i^2} \qquad (3)$$

El esfuerzo tangencial está definido por:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu\left(r\frac{\partial(v_\theta / r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) \quad \text{(en este caso: } v_r = 0\text{)} \qquad (4)$$

Reemplazando v_θ según ec. (3), se encuentra para el esfuerzo tangencial en la pared interior y en la pared exterior:

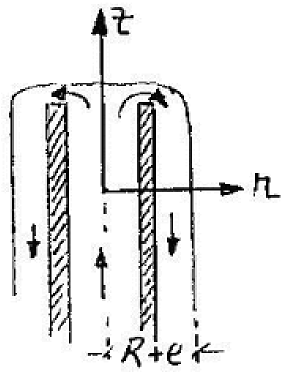
$\tau_{r\theta i} = 2\,\mu\;\Omega\, R_e^2 / (R_e^2 - R_i^2)$

$\tau_{r\theta e} = 2\,\mu\;\Omega\, R_i^2 / (R_e^2 - R_i^2)$

Reemplazando en ec.(1), se obtiene:

$$T_{wi} = T_{we} = 4\,\pi\,\mu\;\Omega\, H\, R_i^2\, R_e^2 / (R_e^2 - R_i^2) \qquad (5)$$

b) Reemplazando los datos, se calcula: $\mu = 0{,}342$ Pa s.



PROBLEMA 6.2-3.- Flujo vertical descendente a lo largo de la pared exterior de un tubo vertical.

Un tubo cilíndrico vertical, de radio exterior R, está lleno de líquido, que rebalsa por el extremo superior y cae como una película de espesor uniforme "e" adherida a la pared exterior del tubo. Modelar **sólo este flujo exterior,** como si el cilindro tuviera longitud infinita. Suponer flujo laminar, con velocidad sólo en la dirección axial hacia abajo, estacionario, incompresible, con simetría axial.

En la superficie exterior de la película (que está en contacto con el aire), suponer que la presión es atmosférica y que el esfuerzo tangencial es despreciable.

A partir de la ecuación de Navier-Stokes, obtener la velocidad axial v_z en función de la posición radial.

Solución: Es más fácil visualizar el flujo como un cilindro macizo vertical, de longitud infinita y radio R. Adherida a la pared de este cilindro, cae una película de líquido de espesor uniforme "e". En coordenadas cilíndricas de eje vertical hacia arriba, la película de líquido ocupa el espacio comprendido entre r = R y r = R+e.

Se aplica la ecuación de Navier-Stokes para encontrar la función $v_z = v_z(r)$, bajo las siguientes hipótesis: (1) Flujo laminar axial: $v_r = v_\theta = 0$; (2) Flujo estacionario: $\partial/\partial t = 0$; (3) Flujo incompresible, lo que significa que se aplica la ecuación de continuidad: $\nabla \bullet v = 0$, que, junto con

(1), implica: $\partial v_z/\partial z = 0$; (4) Longitud infinita (sin efectos de extremos); (5) Simetría axial: $\partial/\partial\theta = 0$; (6) Eje vertical: $g_r = g_\theta = 0$; $g_z = -g$.

Como condiciones de borde, se tiene: (7) Presión atmosférica en la superficie de la película líquida (esto es, para r = R+e); (8) Esfuerzo tangencial nulo en la misma superficie; (9) Velocidad nula en la pared del cilindro (r = R).

La ecn. (D) de Navier-Stokes se reduce a: $\partial p/\partial r = 0$. Con condición (5), resulta: p = p(z). Como p es constante e igual a p_{atm} en r = R+e, se concluye que $p = p_{atm}$ en todo el interior del flujo. Por tanto: $\partial p/\partial z = 0$.

La ecn. (E) es: 0 = 0.

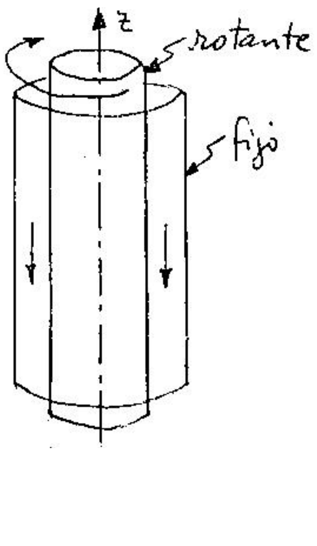
En ecn. (F), de (3) y (5) resulta que: $v_z = v_z(r)$ y la derivada parcial es derivada total dv_z/dr. Así, la ecn. (F) es:

$$-g + \frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = 0$$

con las condiciones de borde: (i) en r = R: $v_z = 0$; (ii) en r = R + e: $\tau_{rz} = 0$.

De la tabla de componentes del tensor "esfuerzo tangencial", con las condiciones de este problema, resulta que la condición (ii) implica: $dv_z/dr = 0$. Por integración:

$$v_z = \frac{1}{4\nu}\left[g\,(r^2 - R^2) - 2g\,(R+e)^2 \ln(r/R)\right]$$



PROBLEMA 6.2-4.- Flujo vertical descendente en el espacio anular entre dos cilindros verticales concéntricos, cuando el cilindro interior gira en torno a su eje.

Considerar un eje cilíndrico vertical de radio 2 cm que gira con velocidad angular 450 RPM dentro de un cilindro fijo de radio 2,2 cm. En el espacio anular entre ambos hay un lubricante de densidad 950 Kg/m3 y viscosidad 6 cp. El lubricante gira arrastrado por el eje; también tiene un desplazamiento axial hacia abajo, con gradiente de presión constante dp/dz = 3500 Pa/m.

a) Aplicar la ecuación de Navier-Stokes al movimiento del fluido en el espacio anular, suponiendo flujo laminar, estacionario, incompresible, con componente radial de la velocidad nula en todas partes, longitud infinita, simetría axial.

NOTAR que las ecuaciones para las componentes axial y tangencial resultan independientes entre sí. Por lo tanto, se pueden integrar separadamente, obteniéndose las componentes axial y tangencial de trayectorias en espiral concéntricas con el eje.

b) Calcular la magnitud del vector velocidad para la posición r = 2,08 cm.

Solución: a) Modelación matemática: Al introducir las hipótesis del enunciado, la ecn. (D) de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas se reduce a :

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}$$

que permite calcular la distribución radial de la presión después de haberse resuelto para v_θ (pero esto no forma parte de la pregunta).

La ec. (E) de Navier-Stokes con las condiciones de borde indicadas para v_θ constituye un problema idéntico al Problema 6.2-2 (el viscosímetro rotatorio) y puede utilizarse dicho resultado en forma directa (en todo caso, la solución se encuentra por integración de la ec. (E) con las condiciones de borde: $v_\theta = 0$ en R_e, $v_\theta = \Omega\, R_i$ en R_i). Notar que la hipótesis de longitud infinita lleva a postular que $\partial v_\theta/\partial z$ es nulo en todas partes.

El resultado del Problema 6.2-2 es:

$$v_\theta = \frac{\Omega\, R_i^2}{r}\,\frac{R_e^2 - r^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

La ec. (F) de Navier-Stokes, mirada separadamente, equivale al problema de un flujo axial a lo largo del espacio anular entre dos cilindros concéntricos fijos. Este problema se formula en forma análoga al del flujo laminar en una tubería cilíndrica (resuelto en clase), pero ahora con las condiciones de borde:

En $r = R_i$, $v_z = 0$;
En $r = R_e$, $v_z = 0$;

El resultado por integración es:

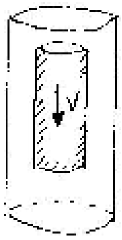
$$v_z = \frac{B\,(r^2 - R_i^2)}{4\,\upsilon} + \frac{B\,(R_e^2 - R_i^2)}{4\,\upsilon}\,\frac{\ln(r/R_i)}{\ln(R_i/R_e)}$$

en que $B = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + g$ (una constante)

b) Con las expresiones anteriores para v_θ y v_z, que son perpendiculares entre sí, se calcula $v = \left[v_\theta^2 + v_z^2\right]^{1/2}$. Con los datos numéricos, resulta: v = 1,395 m en el punto (r = 2,08 cm).

PROBLEMA 6.2-5.- Sólido que cae dentro de un tubo vertical.

Un tubo cilíndrico vertical de radio R_e contiene un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. En el interior de este tubo se deja caer un objeto cilíndrico macizo, de densidad ρ_s y radio R_i. El cilindro interior cae por efecto de la fuerza de gravedad y experimenta fricción con el líquido que lo rodea. Cuando ambas fuerzas se equilibran, el cilindro continúa cayendo con velocidad uniforme V.



Modelar este fenómeno para la condición estacionaria indicada, con las siguientes hipótesis: el tubo y el cilindro tienen largo infinito; el cilindro mantiene una posición concéntrica con el tubo; el movimiento del fluido es laminar y sólo tiene componente axial. Determinar la velocidad uniforme V.

Solución: Seguir el siguiente esquema:

a) Resolver la ecn. de Navier-Stokes para obtener la velocidad del fluido: $v = v(r,\theta,z)$ en coordenadas cilíndricas, suponiendo longitud infinita para el objeto.

b) Calcular el esfuerzo tangencial en la pared del objeto y, con esto, calcular la fuerza de resistencia en la superficie total del objeto.

c) Calcular la velocidad de caída del objeto con la condición "fuerza de gravedad + fuerza de resistencia = 0".

Etapa a): Con las hipótesis indicadas, el problema es similar a la segunda parte del Problema 1b-3, flujo axial a lo largo del espacio anular entre dos cilindros concéntricos, con la única diferencia de que ahora las condiciones de borde son:
En $r = R_i$, $v_z = -V$ (en que V es la velocidad de caída del objeto);
En $r = R_e$, $v_z = 0$;

La ecn. (F) es: $-B+\frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)=0$ en que $B=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}+g$

Con las condiciones de borde indicadas, se obtiene:

$$v_z=\frac{Br^2}{4\nu}+c_1\ln r+c_2$$ en que las constantes de integración son:

$$c_1=-\frac{V+\left(B(R_i^2-R_e^2)/4\nu\right)}{\ln\frac{R_i}{R_e}};\quad c_2=-V-\frac{B\ R_i^2}{4\ \nu}-c_1\ln R_i$$

Etapa b) De la Tabla del tensor "esfuerzo tangencial", con sólo la componente z de la velocidad, se tiene:

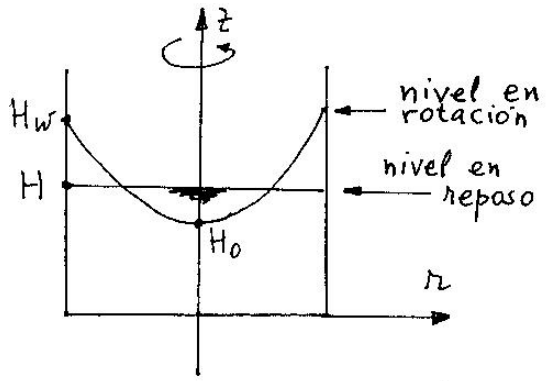
$$\tau_{rz}=-\mu\ \frac{dv_z}{dr}\ =-\mu\left(\frac{Br}{2\nu}+\frac{c_1}{r}\right)$$

La fuerza fricional total es: $F_z = \tau_{rz}$ (en R_i) $2\ \pi\ R_i\ L$, para una longitud L del objeto.

Etapa c) Igualando F_z con el peso del objeto, $W = (\pi\ R_i^2\ L\ \rho_s\ g)$, se obtiene:

$$V = \left(\frac{B\,R_i^2}{2\nu} - \frac{R_i^2\,\rho_s\,g}{2\mu} \right) \ln\frac{R_i}{R_e} + \frac{B}{4\,\nu}(R_e^2 - R_i^2)$$

PROBLEMA 6.2-6.- Forma de la superficie libre en un líquido que gira con velocidad angular constante.



Un recipiente cilíndrico vertical, de radio R, contiene líquido hasta el nivel H sobre el fondo. El recipiente gira con velocidad angular Ω constante. Debido al efecto centrífugo del movimiento, el líquido tiende a tomar un nivel más alto en el borde del recipiente y más bajo en el centro (eventualmente, si Ω es suficientemente grande, el líquido se va a derramar sobre el borde del recipiente).

Determinar la forma de la superficie libre del líquido y, en particular, la altura H_w que toma el líquido en contacto con la pared y la altura H_0 del líquido en el eje del cilindro. Para este fin, aplicar la ecuación de Navier-Stokes en la forma siguiente:

a) Resolver la ec. de Navier-Stokes suponiendo que el movimiento ocurre en régimen laminar, estacionario, con simetría axial. Se supone que el líquido se mueve en trayectorias circulares concéntricas con el eje z.

Para integrar la ecuación y obtener una expresión para la velocidad tangencial v_θ, postular como condiciones de borde:

Para r = R: $v_\theta = \Omega R$, para todo z.

Para r = 0: $v_\theta = 0$, para todo z.

Estas condiciones de borde requieren postular que v_θ es independiente de z (de lo contrario, no podríamos encontrar una solución particular simple). En consecuencia, $\partial v_\theta/\partial z = 0$,

b) Conocida la velocidad tangencial, integrar para encontrar la presión p(r,z). Notando que la superficie libre del líquido es una superficie de presión constante (igual a la presión atmosférica), se utiliza la condición de borde: para $z = H_0$, $p = p_{atm}$. La ecuación de la superficie libre se deduce de la ecuación de la presión , con la condición $p = const = p_{atm}$.

c) Finalmente, para encontrar H_w, se aplica la condición: el volumen de líquido en reposo es igual al volumen de líquido en rotación (integrar la ecuación de la superficie libre para encontrar el volumen en rotación).

Solución: La superficie libre es una superficie que se encuentra a presión constante e igual a la presión atmosférica. Por lo tanto, es necesario resolver la ecuación de Navier-Stokes para la velocidad y la presión y, con esa solución, buscar la forma de las superficies de presión constante.

a) **Solución de la ec. de Navier-Stokes para la velocidad v_θ**: se aplican las siguientes hipótesis:
H1: flujo estacionario: $\partial/\partial t = 0$;
H2: trayectorias concéntricas en planos z = const., esto es: $v_r = v_z = 0$.
H3: simetría axial, esto es: $\partial/\partial\theta = 0$.
H4: fluido incompresible: Se aplica la ecn. de continuidad $\nabla \bullet v = 0$.
H5: eje z vertical hacia arriba, esto es, las componentes de la aceleración de gravedad son:
$g_z = -g$; $g_r = g_\theta = 0$

Con esto, la ecuación de Navier-Stokes (ecuación E) se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

Además, se indicó en el enunciado la necesidad de postular $\partial v_\theta/\partial z = 0$, con lo cual la ec. (1) se reduce a:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv_\theta)}{dr}\right) = 0 \qquad (2)$$

Con las condiciones de borde indicadas en el enunciado, la integración conduce a:

$$v_\theta = \Omega\, r \qquad (3)$$

(este resultado implica que el líquido gira como si fuera un cuerpo sólido).

b) **Solución de la ecuación de Navier-Stokes para la presión**: con la solución encontrada en ec. (3) para v_θ, se integran ahora las ecs. (D) y (F) para encontrar la presión p. Con las hipótesis indicadas, estas ecuaciones se reducen a:

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \qquad (D)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) - g \qquad (F)$$

La integración de la ec. (D) lleva a:
$p = ½\, \rho\, \Omega^2 r^2 + f_1(z)$ (donde $f_1(z)$ es una función arbitraria de z)

Análogamente, la ecn. (F) lleva a:
$p = -\rho\, g\, z + f_2(r)$ (donde $f_2(r)$ es una función arbitraria de r)

De aquí resulta que la presión p está dada por:
$p = ½\, \rho\, \Omega^2 r^2 - \rho\, g\, z + a$ (donde “a” es una constante arbitraria)

La constante “a” se determina con la condición de borde:
Para r = 0: $p = p_{atm}$: $z = H_0$.
Se obtiene: $a = p_{atm} + \rho\, g\, H_0$. Con esto, la solución es:

$p = ½\,\rho\,\Omega^2\,r^2 + \rho\,g\,(H_0 - z) + p_{atm}$ (4)

c**) Ecuación de la superficie libre:** Definiendo como (r_s, z_s) las coordenadas de la superficie libre, la ecuación se obtiene haciendo $p = p_{atm}$ en ec. (4):

$½\,\rho\,\Omega^2\,r_s^2 + \rho\,g\,(H_0 - z_s) = 0$ (5)

Para determinar el valor de H_0, se iguala el volumen ocupado por el líquido en estado de reposo (con altura H, dato) con el volumen bajo la superficie libre, obtenido por integración:

$\pi\,R^2\,H = \int_0^R z_s\,2\pi r\,dr$ (donde z_s se reemplaza desde ec. (5) como función de r)

El resultado es: $H_0 = H - (\Omega^2\,R^2 / 4\,g)$ (6)

Finalmente, se obtiene H_w mediante ec. (5), calculando el valor de z_s para $r_s = R$. Introduciendo en ec. (5) el valor de H_0 obtenido en ec.(6), se llega a:

$H_w = H + (\Omega^2\,R^2 / 4\,g)$ (7)