

Profesor: Tomás Vargas

Auxiliar: Melanie Colet

Tarea N° 2: Transferencia de calor en estado transiente**(Fecha de Entrega:** Jueves 15 de Octubre de 2009. Hasta las 18:00 hrs. en Secretaría Docente).**OBJETIVO:**

Esta tarea tiene como objetivo que usted aprenda a resolver ecuaciones en derivadas parciales utilizando el método numérico de diferencias finitas visto en clases. La aplicación de esta metodología es de suma importancia en la ingeniería para la representación de los fenómenos de transferencia de calor y transferencia de masa.

PROBLEMA:

Considere una barra semi-infinita, que se extiende entre $x_0 = 0$ y $x_1 = \infty$, que se encuentra a una temperatura inicial $T_0 = 0$ °C. La ecuación de transferencia de calor por conducción en el estado transiente queda definida como (visto en clase auxiliar):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k' \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

donde $k' = k/\rho \cdot c_p$ siendo su valor igual a $0.16 \text{ m}^2/\text{s}$ en este caso.

Considere que una fuente a $T_1 = 100$ °C se pone en contacto con el extremo izquierdo de la barra (en el instante $t = 0$ s) de manera que las condiciones iniciales y de borde son:

$$\begin{aligned} T(x=0, t) &= T_1, \quad \forall t \geq 0 \\ T(x, t=0) &= T_0, \quad \forall x > 0 \\ T(x=\infty, t) &= T_0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Si se realiza el cambio de variables:

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$$

La ecuación (1) se puede expresar como:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = k' \cdot \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2}$$

con condiciones iniciales y de borde:

$$\begin{aligned} T^*(x=0, t) &= 1, \quad \forall t \geq 0 \\ T^*(x, t=0) &= 0, \quad \forall x > 0 \\ T^*(x=L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

La solución analítica del problema anterior es igual a:

$$T^*(x,t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{k \cdot t}}\right)$$

Siendo

$$\operatorname{erf}(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\lambda \exp(-u^2) du$$

TAREAS A REALIZAR:

Determinar el perfil de temperaturas para al menos cuatro instantes de tiempo (entre 0 y 300 s) representativos de la evolución temporal de la temperatura en la barra. Los resultados debe presentarlos en gráficos separados en cada uno de los cuales se deben representar:

- La solución analítica.
- La solución numérica (utilizando diferencias finitas). En este caso debe resolver para los casos de 10, 50, 100, 200 y 400 para la variable x . Para la variable temporal considere una malla con al menos 300 nodos en la cual debe asegurarse que se encuentren los cuatro instantes de tiempo que usted seleccionó para calcular los perfiles de temperatura mediante la solución analítica.
- Calcule el error de cálculo del método numérico con respecto a la solución analítica para cada una de las mallas espaciales utilizadas (puede calcular un error relativo promedio o el coeficiente de determinación entre los resultados asociados a las distintas curvas presentadas). Presente en un gráfico error versus número de nodos sus resultados.

El trabajo debe entregarlo como un pequeño informe en formato pdf que incluya sus resultados gráficos y numéricos más relevantes, además de una pequeña discusión de cada uno de ellos.

NOTA: para el caso numérico no existen los valores infinitos por lo que el extremo derecho de la barra debe modelarlo como un valor lo suficientemente alto como para que la temperatura permanezca constante en todo momento (Indicación: programe considerando un valor de $x_L = 50$ m o algo menor de acuerdo a lo observado de los resultados analíticos).